Grundlegende Inhalte Mathematik, Realschule, Jahrgangsstufe 7 (I)

Inhaltsverzeichnis

Stand: 10.12.2021

Potenzen

1 Allgemeines

Potenzen mit negativer Basis	Ist der Exponent … • eine gerade Zahl, so ist der Potenzwert positiv. • eine ungerade Zahl, so ist der Potenzwert negativ.	Beispiele: • $(-3)^4 = 81$ Achtung: $-3^4 = -(3^4) = -81$ • $(-3)^3 = -27$
Potenzen mit dem Exponenten Null	$a^0 = 1$ 0^0 ist nicht definiert	Beispiele: • $5^0 = 1$ • $(-3{,}5)^0 = 1$
Potenzen mit negativem Exponenten		Beispiele: • $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ • $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

2 Potenzgesetze

Potenzen mit gleicher Basis multiplizieren und dividieren	• $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ • $\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n}$	Beispiele: • $3^3 \cdot 3^4 = 3^{3+4} = 3^7$ • $3^4 \cdot 3^{-6} = 3^{4+(-6)} = 3^{-2}$ • $5^7 : 5^5 = 5^{7-5} = 5^2$ • $5^6 : 5^9 = 5^{6-9} = 5^{-3}$
Potenzen mit gleichem Exponenten multiplizieren und dividieren	• $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ • $a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	Beispiele: • $(3x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$ • $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5$ • $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$ • $\frac{2^4}{6^4} = \left(\frac{2}{6}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$
Potenzen potenzieren	• $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	Beispiel: • $(4^4)^3 = 4^{4 \cdot 3} = 4^{12}$

3 Vorsilben

Vorsilbe	Zehnerpotenz	Zahlwort	Zahl
Exa	10^{18}	Trillion	1 000 000 000 000 000 000
Peta	10^{15}	Billiarde	1 000 000 000 000 000
Tera	10^{12}	Billion	1 000 000 000 000
Giga	10^{9}	Milliarde	1 000 000 000
Mega	10^{6}	Million	1 000 000
Kilo	10^{3}	Tausend	1 000
Hekto	10^{2}	Hundert	100
Deka	10^{1}	Zehn	10
–	10^{0}	Eins	1
Dezi	10^{-1}	Zehntel	0,1
Zenti	10^{-2}	Hundertstel	0,01
Milli	10^{-3}	Tausendstel	0,001
Mikro	10^{-6}	Millionstel	0,000 001
Nano	10^{-9}	Milliardstel	0,000 000 001
Piko	10^{-12}	Billionstel	0,000 000 000 001
Femto	10^{-15}	Billiardstel	0,000 000 000 000 001
Atto	10^{-18}	Trillionstel	0,000 000 000 000 000 001

Anwendungsbeispiele:

- $0{,}00007 = 7 \cdot 0{,}00001 = 7 \cdot 10^{-5}$
- Dicke der Haut einer Seifenblase: $0{,}8\,\text{Mikrometer} = 0{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = 0{,}0000008\,\text{m}$
- Entfernung der Sonne von der Erde: $150\,\text{Millionen Kilometer} = 150 \cdot 10^{6}\ \text{km} = 150000000\,\text{km}$

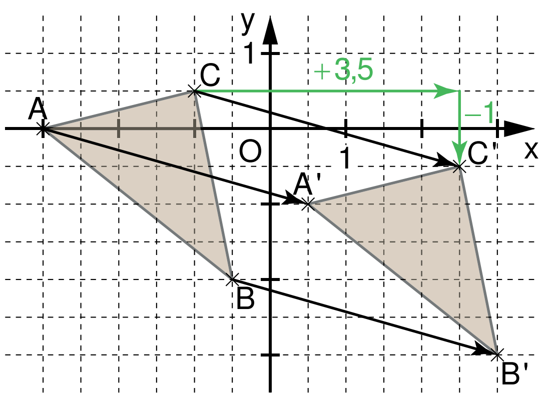
Parallelverschiebung

1 Die Parallelverschiebung und deren Eigenschaften

Eigenschaften: $P \overset{\vec{v}}{\longmapsto} P'$

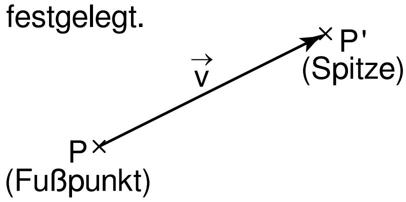
- Durch Urpunkte und zugehörige Bildpunkte werden Pfeile festgelegt, die parallel, gleich lang und gleich orientiert sind.
  Die Pfeilmenge, die sie bilden, heißt **Vektor** $\vec{v}$.
- Die Parallelverschiebung ist umkehrbar.
- Sie ist längen-, geraden-, winkel-, parallelen- und kreistreu.
- Ur- und zugehörige Bildstrecken sind parallel. Dies gilt entsprechend für Ur- und zugehörige Bildgeraden.
- Die Parallelverschiebung besitzt keinen Fixpunkt.
- Alle Geraden, die parallel zu den Verschiebungspfeilen verlaufen, sind Fixgeraden.
- Die Parallelverschiebung ist eine **Kongruenzabbildung**.

Beispiel: $\Delta ABC \xrightarrow{\vec{v}=\begin{pmatrix}3{,}5\\-1\end{pmatrix}} \Delta A'B'C'$ mit $A(-3|0), B(-0{,}5|-2)$ und $C(-1|0{,}5)$



2 Vektoren

Die Koordinaten des Pfeils $\overrightarrow{PP'}$ und damit des zugehörigen Vektors $\vec{v}$ werden durch die Koordinaten des Fußpunktes $P(x|y)$ und der Spitze $P'(x'|y')$ festgelegt.

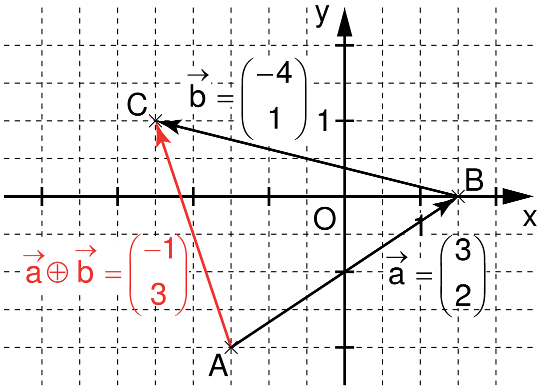


Man berechnet sie nach der Regel „Spitze minus Fuß“:

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$$

Beispiel: $P(1{,}5|-3)$ und $P'(5|-4) \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} 5-1{,}5 \\ -4-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

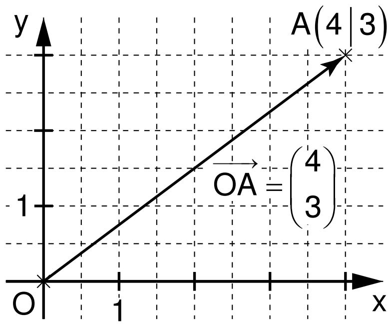
2.1 Vektoraddition

Allgemein	$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$	$\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix}$
Beispiel: 	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{a} \oplus \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+(-4) \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2.2 Ortspfeil

Ortspfeile sind Pfeile, die vom Ursprung des Koordinatensystems zu einem Punkt führen.
Die x- und y-Koordinaten des Ortspfeils entsprechen denen des Punktes an der Spitze.

Beispiel: $A(4|3)$; $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



3 Umkehrabbildung

Eine Parallelverschiebung mit dem Vektor $\vec{v}$ kann mit dem Gegenvektor $\vec{v}^*$ umgekehrt werden.

$$P \xmapsto{\vec{v}} P'; \; P' \xmapsto{\vec{v}^*} P$$

Für den Gegenvektor $\vec{v}^*$ gilt: $\vec{v}^* = \begin{pmatrix} -x_v \\ -y_v \end{pmatrix}$.

Beispiel: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; Gegenvektor $\vec{v}^* = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

4 Berechnung von Punktkoordinaten

Beispiel: Berechnung der Koordinaten des Bildpunktes A' bei der Abbildung

$$A(4|1) \xmapsto{\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} A'(x'|y').$$

1. Möglichkeit: Vektoraddition

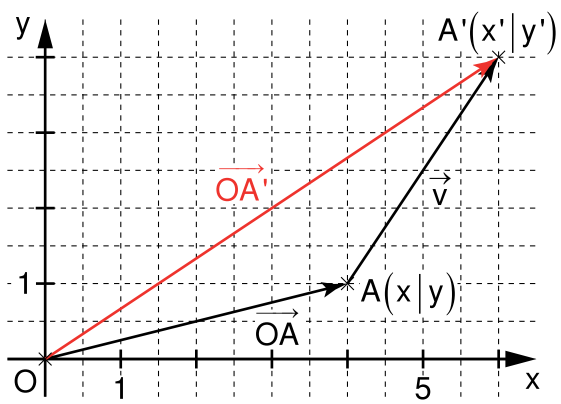
Allgemein: $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} \oplus \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x_v \\ y + y_v \end{pmatrix} \Rightarrow A'(x + x_v | y + y_v)$$

Beispiel: $A(4|1); \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 1+3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(6|4)$$



2. Möglichkeit: Abbildungsvorschrift

Allgemein: $A(x|y) \xmapsto{\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}} A'(x + x_v | y + y_v)$

Beispiel: $A(4|1) \xmapsto{\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} A'(4+2|1+3) \Rightarrow A'(6|4)$

3. Möglichkeit: Koordinatenvergleich

Allgemein: $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-4 \\ y'-1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 = x'-4 \text{ und } 3 = y'-1$

$\Leftrightarrow x' = 6 \text{ und } y' = 4 \qquad \Rightarrow A'(6|4)$

5 Berechnung der Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke

Allgemein: $A(x_A|y_A); B(x_B|y_B)$

$$M(x_M|y_M) = M\left(\frac{x_A + x_B}{2}\middle|\frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Beispiel: $A(-2|1); B(3|4)$

$$M\left(\frac{-2+3}{2}\middle|\frac{1+4}{2}\right) = M(0{,}5|2{,}5)$$

6 Berechnung des Flächeninhalts von Vielecken mit zweireihigen Determinaten

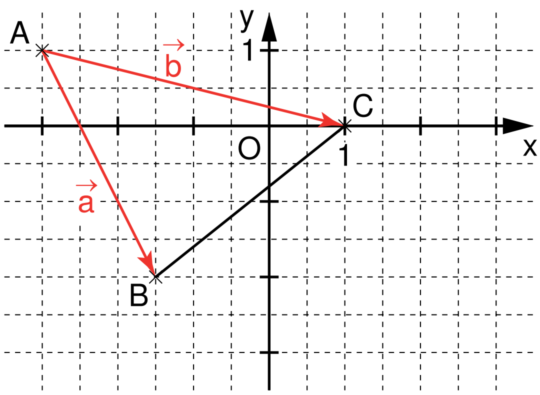
6.1 Dreiecke und Parallelogramme

Dreieck

Allgemein:

$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} FE = \frac{1}{2} \cdot (x_a y_b - x_b y_b)\, FE$$



Beispiel:

$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

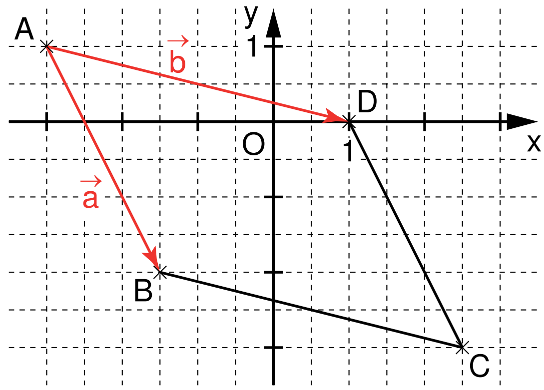
$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1{,}5 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} FE$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1{,}5 \cdot (-1) - 4 \cdot (-3))\, FE$$

$$= 5{,}25\, FE$$

Parallelogramm

Allgemein:



$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AD} = \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} \text{FE} = (x_a y_b - x_b y_b)\,\text{FE}$$

Beispiel:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AD} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} 1{,}5 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \text{FE} \\ &= \left(1{,}5 \cdot (-1) - 4 \cdot (-3)\right) \text{FE} \\ &= 10{,}5\,\text{FE} \end{aligned}$$

Bei der Bildung der Determinante ist sowohl beim Dreieck als auch beim Parallelogramm zu beachten:

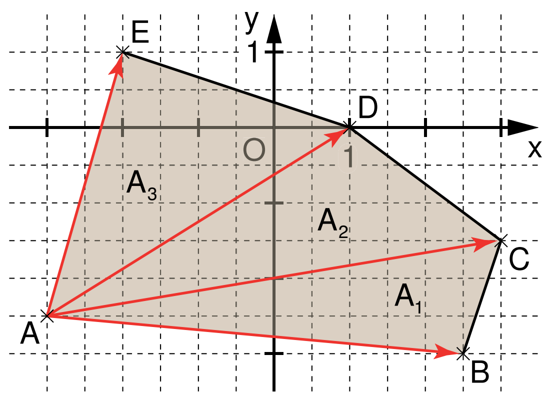
- Beide Pfeile müssen den gleichen Fußpunkt haben.
- Der Pfeil, der gegen den Uhrzeigersinn über die Fläche in Richtung des anderen Pfeils gedreht werden kann, steht an erster Stelle.

6.2 Vielecke

Jedes Vieleck kann in Dreiecke zerlegt werden.

Für den gesamten Flächeninhalt A gilt:

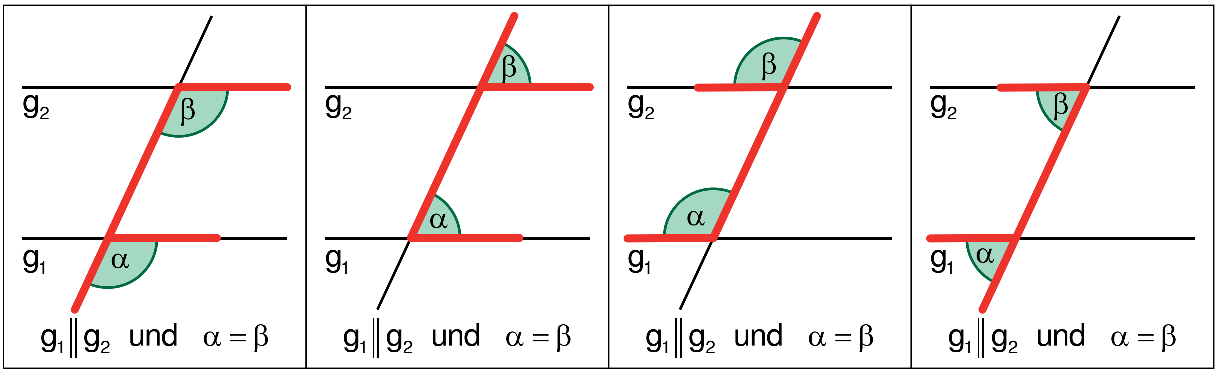
$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$.



7 Winkelmaße an parallelen Geraden

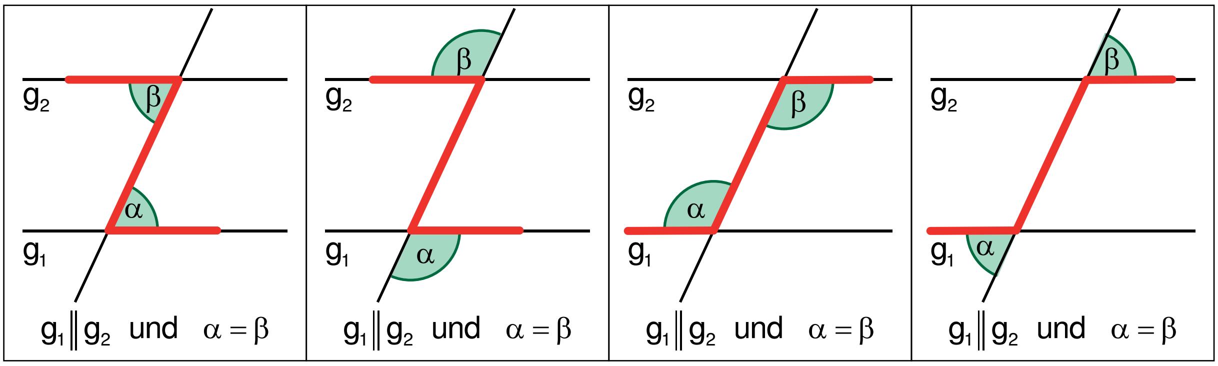
7.1 Stufenwinkel

An zwei parallelen Geraden g_1 und g_2, die von einer dritten Geraden geschnitten werden, haben Stufenwinkel (F-Winkel) gleiches Maß.



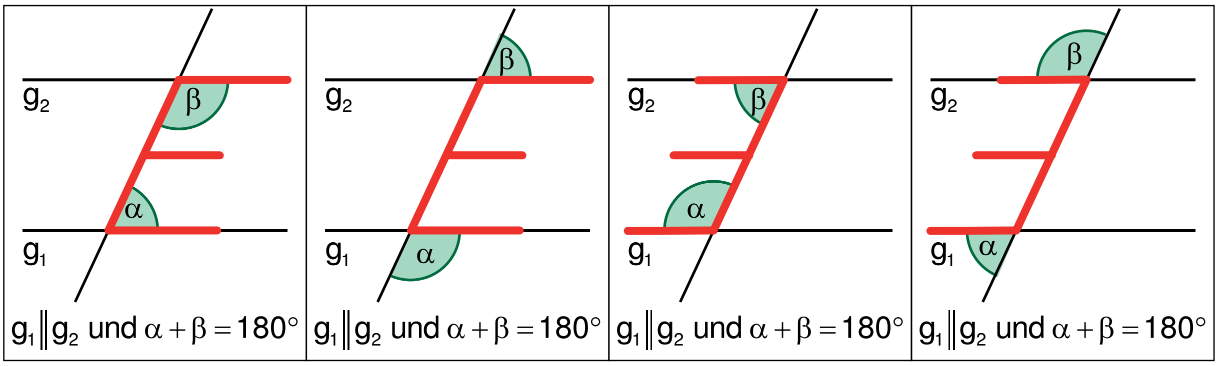
7.2 Wechselwinkel

An zwei parallelen Geraden g_1 und g_2, die von einer dritten Geraden geschnitten werden, haben Wechselwinkel (Z-Winkel) gleiches Maß.



7.3 Ergänzungswinkel

An zwei parallelen Geraden g_1 und g_2, die von einer dritten Geraden geschnitten werden, ergeben die Maße von Ergänzungswinkeln (E-Winkel) zusammen $180°$.

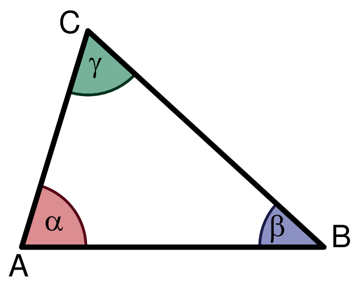


Umkehrung: Zwei Geraden sind parallel, wenn entsprechende Winkelbeziehungen gelten.

8 Summe der Innenwinkelmaße im Dreieck

In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkelmaße 180°:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



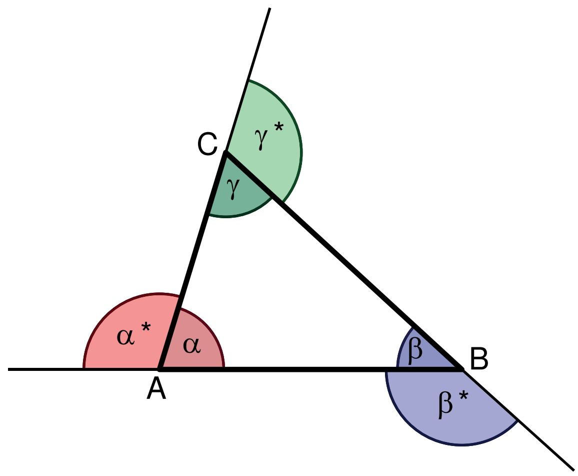
9 Außenwinkelsatz im Dreieck

Beim Dreieck nennt man den Nebenwinkel eines Innenwinkels auch Außenwinkel.

Dabei gilt: $\alpha + \alpha^* = 180°$.

Das Maß eines Außenwinkels ist gleich der Summe der Maße der beiden nicht anliegenden Innenwinkel:

$\alpha^* = \beta + \gamma$; $\beta^* = \alpha + \gamma$; $\gamma^* = \alpha + \beta$.



10 Summe der Innenwinkelmaße bei Vierecken und Vielecken

Viereck: In jedem Viereck beträgt die Summe der Innenwinkelmaße 360°.

n-Eck: In jedem Vieleck mit n Ecken gilt für die Summe der Innenwinkelmaße: $(n-2) \cdot 180°$.

Dreiecke

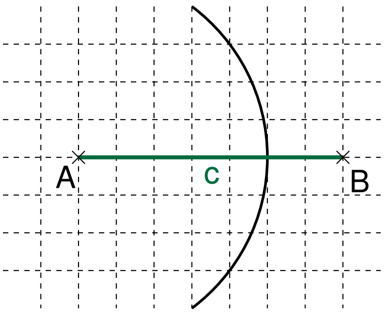
Dreiecksungleichung: Die Summe der Längen zweier Dreiecksseiten ist stets größer als die Länge der dritten Seite.

Seiten-Winkel-Beziehung: Der längeren Seite liegt stets der größere Winkel gegenüber. Gleich langen Seiten liegen maßgleiche Winkel gegenüber.

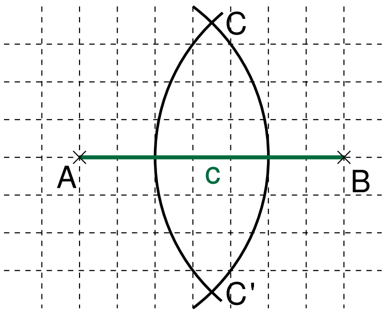
1 Dreieckskonstruktionen

Dreiecke sind eindeutig konstruierbar, wenn ...

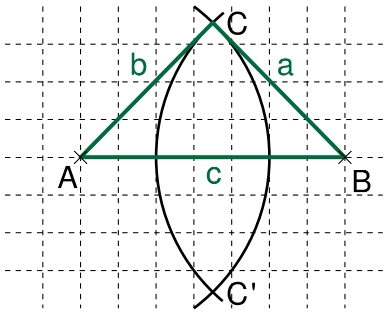
a) ... drei Seitenlängen gegeben sind und die Dreiecksungleichung erfüllt ist (**SSS**).



Zeichne die Strecke $\overline{AB}$ und einen Kreis um A mit dem Radius $|\overline{AC}|$.

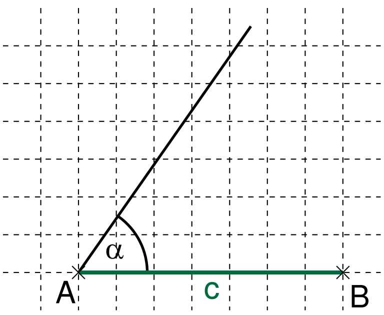


Zeichne einen Kreis um B mit dem Radius $|\overline{BC}|$.
Die Kreise schneiden sich in den Punkten C und C'.

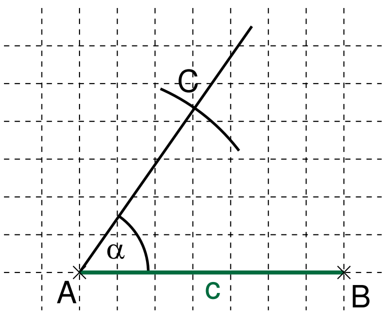


Zeichne (unter Beachtung der Orientierung) das Dreieck ABC.

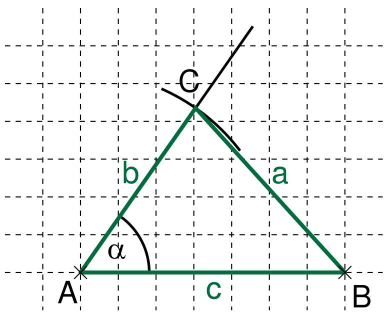
b) ... zwei Seitenlängen und das Maß des eingeschlossenen Winkels gegeben sind (**SWS**).



Zeichne die Strecke $\overline{AB}$ und trage den Winkel mit dem Maß α in A an die Seite c an.



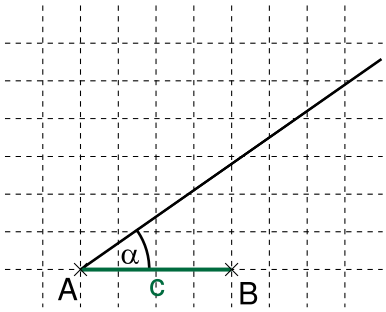
Zeichne einen Kreis um A mit dem Radius $|\overline{AC}|$.
Dieser Kreis schneidet den freien Schenkel des Winkels mit dem Maß α im Punkt C.



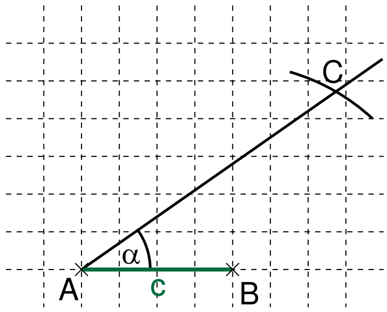
Zeichne das Dreieck ABC.

Grundlegende Inhalte Mathematik, Realschule, Jahrgangsstufe 7 (I)

c) ... zwei Seiten und das Maß des Winkels, welcher der größeren Seite gegenüberliegt, gegeben sind (**SSW$_g$** oder **SsW**; $|\overline{BC}| > |\overline{AB}|$).

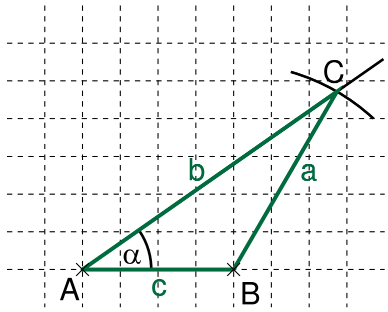


Zeichne die Strecke $\overline{AB}$ und trage den Winkel mit dem Maß α in A an die Seite c an.



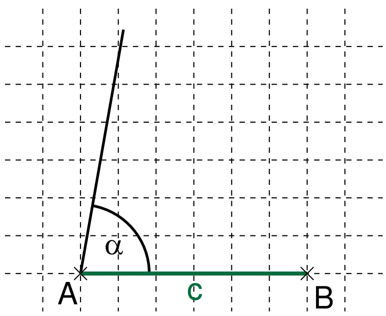
Zeichne einen Kreis um B mit dem Radius $|\overline{BC}|$.

Dieser Kreis schneidet den freien Schenkel des Winkels mit dem Maß α im Punkt C.

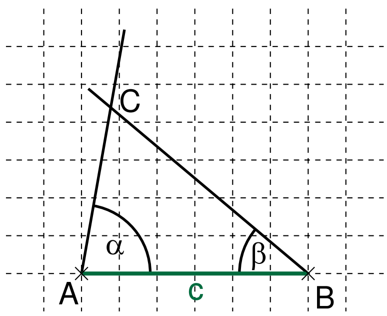


Zeichne das Dreieck ABC.

d) ... eine Seitenlänge und die Maße der beiden anliegenden Winkel gegeben sind (**WSW**).

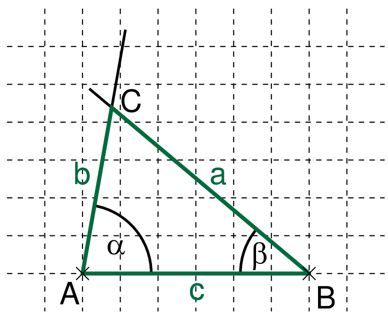


Zeichne die Strecke $\overline{AB}$ und trage den Winkel mit dem Maß α in A an die Seite c an.



Trage den Winkel mit dem Maß β in B an die Seite c an.

Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel der Winkel ist der Punkt C.



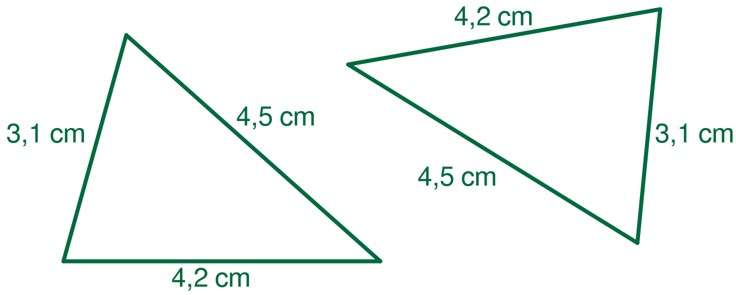
Zeichne das Dreieck ABC.

2 Kongruenzsätze

Dreiecke sind kongruent, wenn sie …

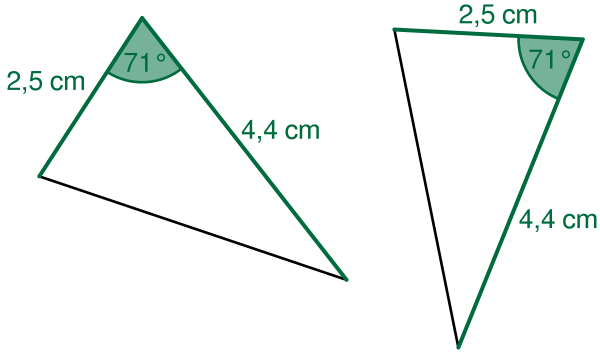
a) … in den Seitenlängen übereinstimmen.

SSS



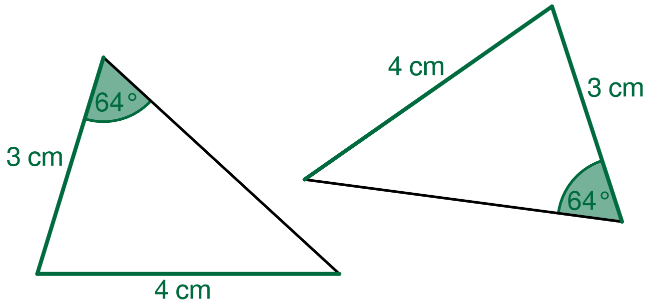
b) … in den Längen zweier Seiten und dem Maß des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen.

SWS



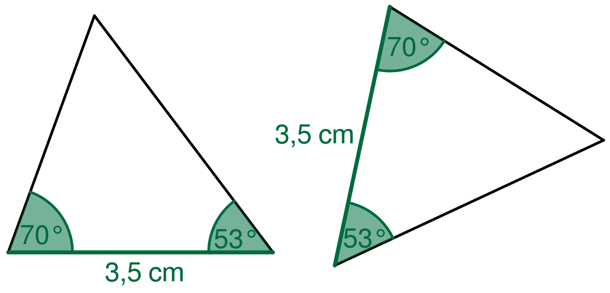
c) … in den Längen zweier Seiten und im Maß des Gegenwinkels der längeren der beiden Seiten übereinstimmen.

SSW$_g$ oder **SsW**



d) … in der Länge einer Seite und in den Maßen zweier anliegender Winkel übereinstimmen.

WSW



Raumgeometrie

1 Festlegung einer Ebene

Eine Ebene wird festgelegt

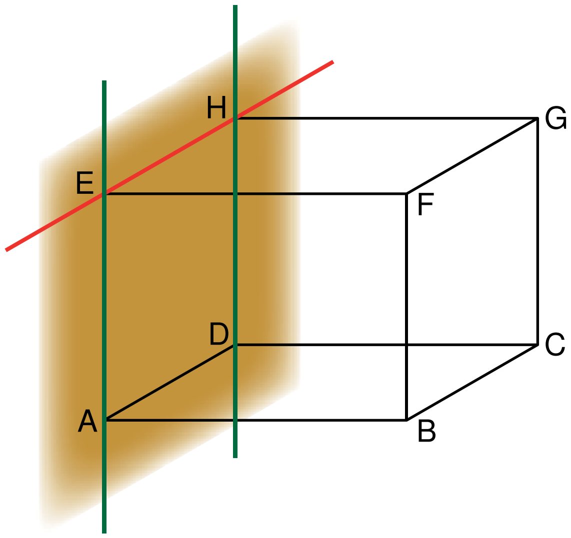
- durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, z. B. A, D und H.

oder

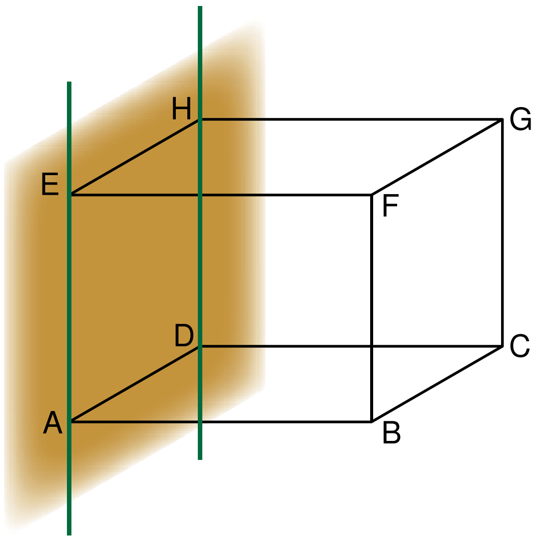
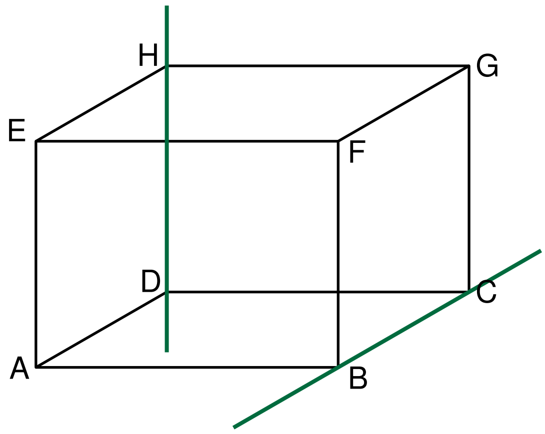
- durch eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt, z.B. EH und A.

oder

- durch zwei sich schneidende Geraden, z.B. AD und DH.

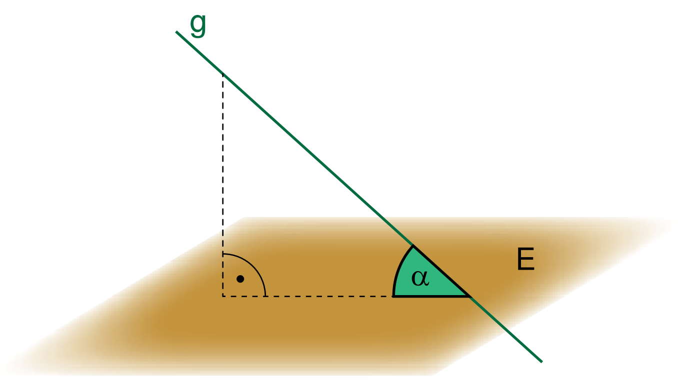


2 Lagebeziehungen zwischen Geraden

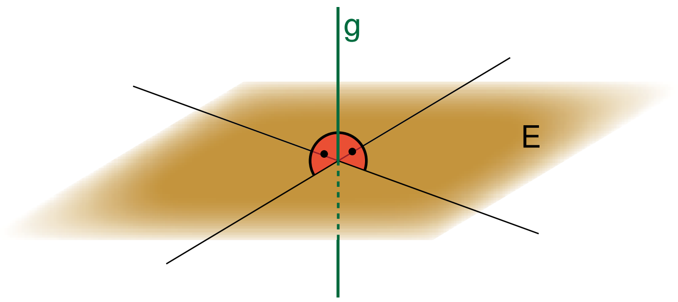
Geraden heißen parallel zueinander, wenn sie in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, z. B.: $AE \parallel DH$.	Geraden, die sich nicht schneiden und nicht parallel sind, heißen windschief, z. B. DH und BC.
	

3 Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen

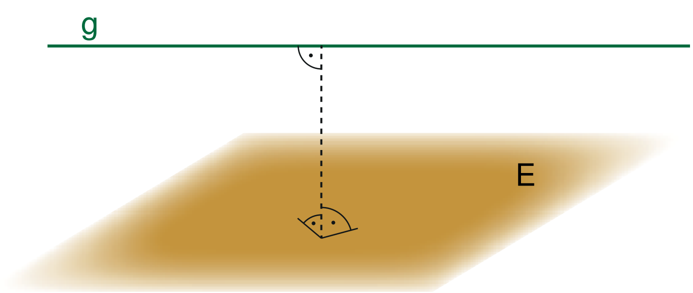
Die Gerade g schließt mit der Ebene E einen Winkel mit dem Maß α ein.



Die Gerade g steht senkrecht auf der Ebene E.



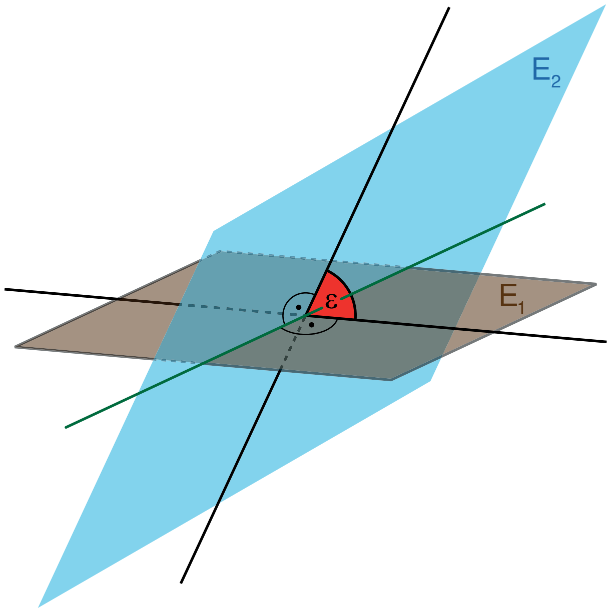
Die Gerade g liegt parallel zur Ebene E.



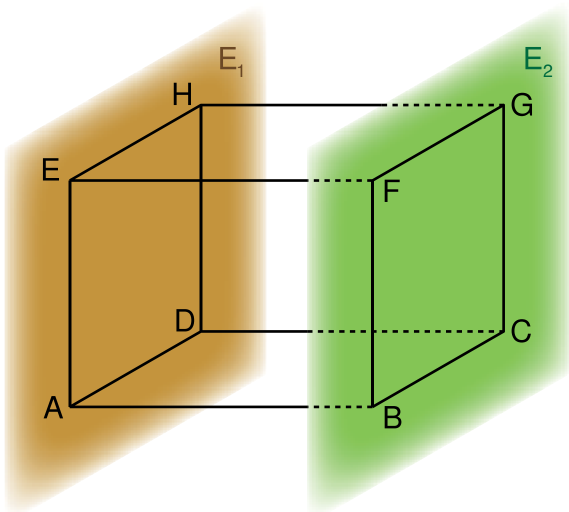
4 Lagebeziehungen zwischen Ebenen

Der Neigungswinkel zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2 hat das Maß ε.

Wenn $\varepsilon = 90°$ ist, dann liegen E_1 und E_2 senkrecht zueinander.



Die Ebenen E_1 und E_2 liegen parallel zueinander.



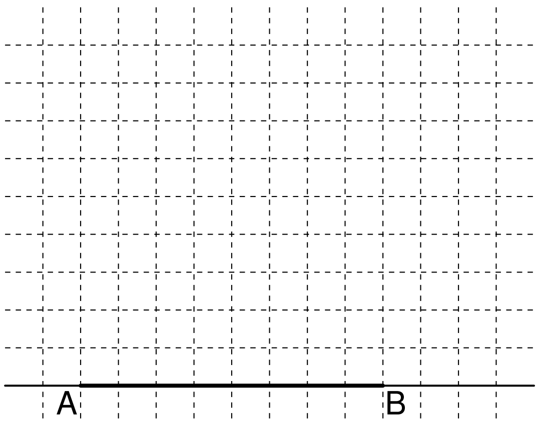
5 Zeichnen von Schrägbildern

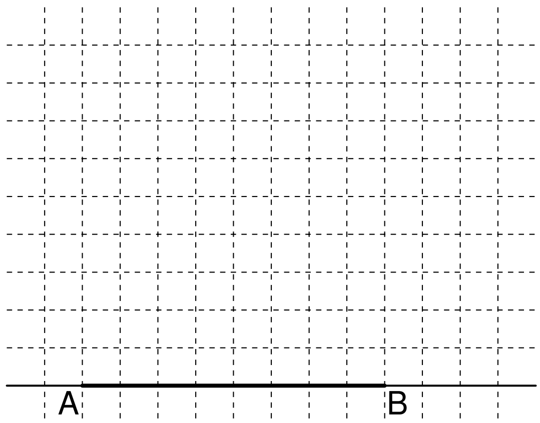
Beispiel: Das Rechteck ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M ist die Grundfläche einer Pyramide ABCDS mit der Höhe $\overline{MS}$.

Es gilt: $|\overline{AB}| = 4$ cm; $|\overline{BC}| = 3$ cm; $|\overline{MS}| = 4$ cm;
Schrägbildachse AB; Verzerrungsmaßstab q; Verzerrungswinkel ω

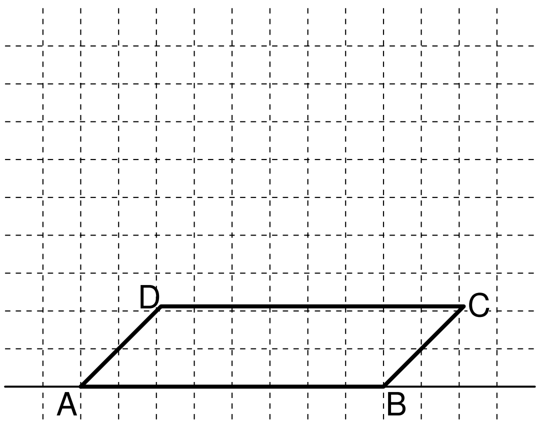
$q = 0{,}5;\ \omega = 45°$

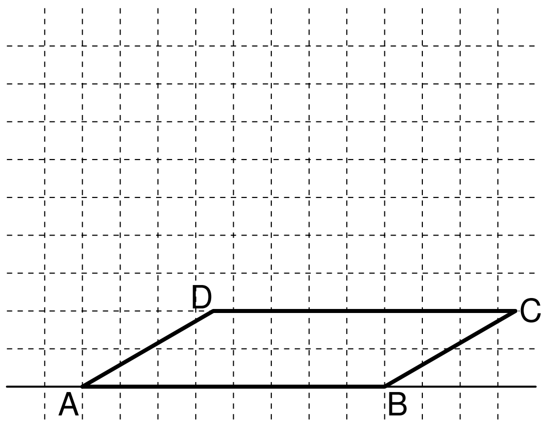
$q = \frac{2}{3};\ \omega = 30°$



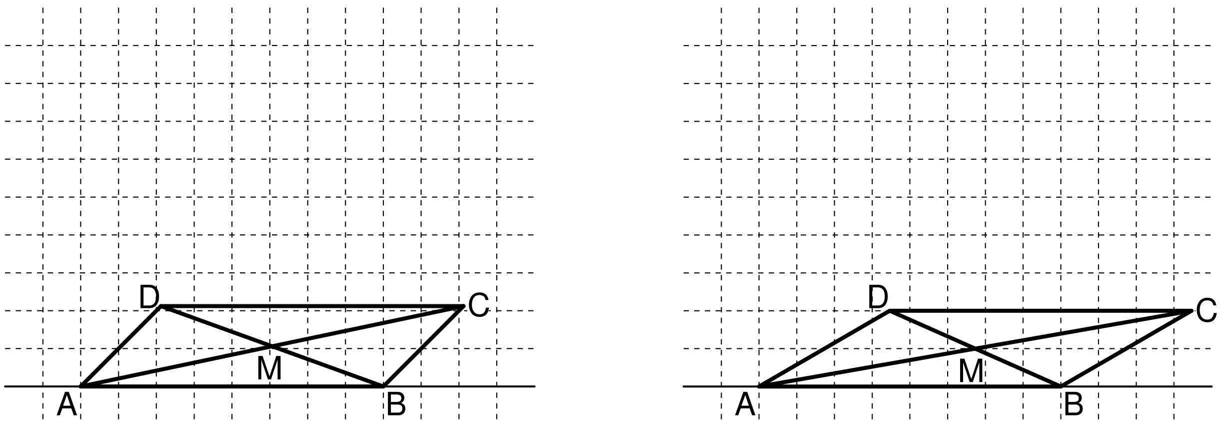


1. Schritt:
Zeichne die Schrägbildachse mit den Punkten A und B.

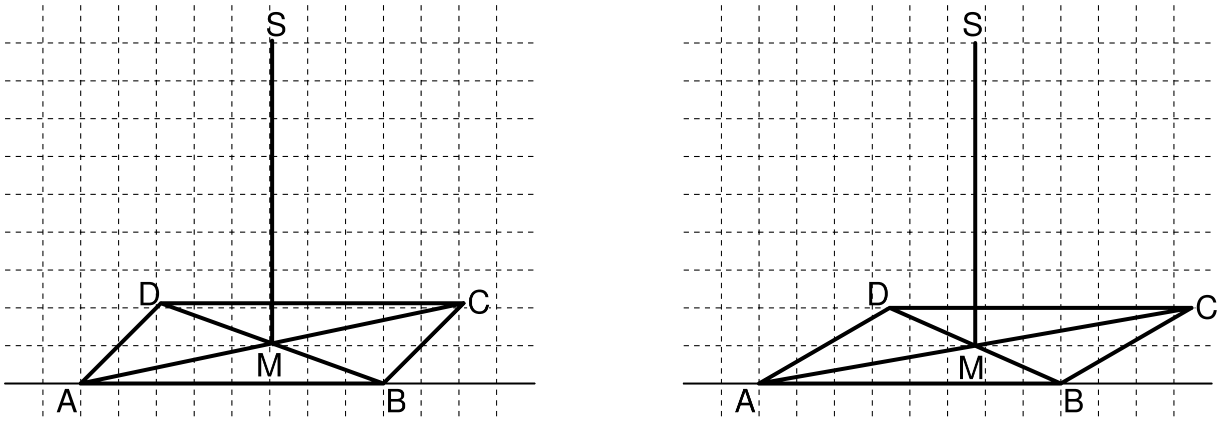




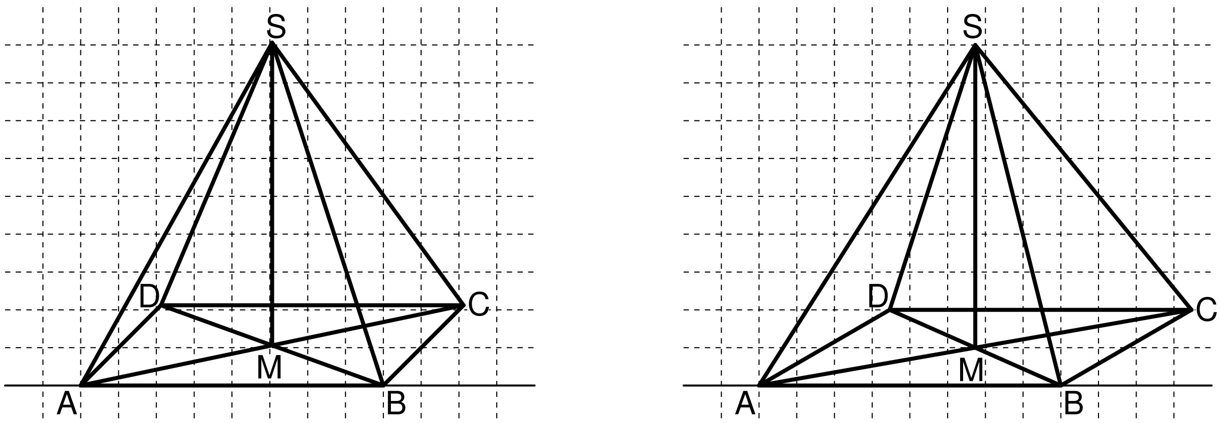
2. Schritt:
Zeichne die in der Zeichenebene senkrecht zur Schrägbildachse verlaufenden Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ verzerrt und verkürzt ein. Verbinde die Punkte C und D.



3. Schritt:
Zeichne den Diagonalenschnittpunkt M ein.



4. Schritt:
Die Höhe steht senkrecht auf der Grundfläche und wird in wahrer Länge gezeichnet.



5. Schritt:
Ergänze die Seitenkanten.

Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche

Alle Punkte eines geometrischen Ortes haben die gleiche geometrische Eigenschaft.

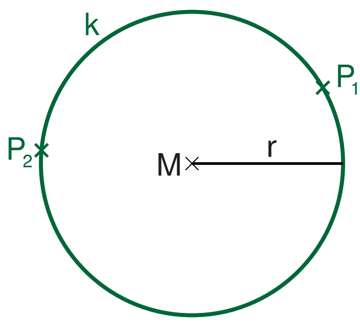
1 Geometrische Ortslinien

a) bezüglich Punkten:

Kreislinie k:

Alle Punkte P_n haben die gleiche Entfernung von einem Punkt M.

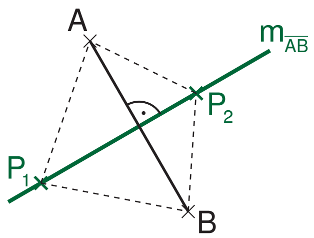
$\left|\overline{P_nM}\right| = r$



Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$:

Alle Punkte P_n haben die gleiche Entfernung von den Punkten A und B.

$\left|\overline{AP_n}\right| = \left|\overline{BP_n}\right|$

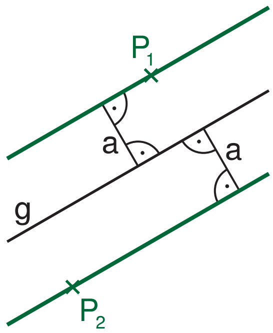


b) bezüglich Geraden oder Strecken:

Parallelenpaar:

Alle Punkte P_n haben den gleichen Abstand von der Geraden g.

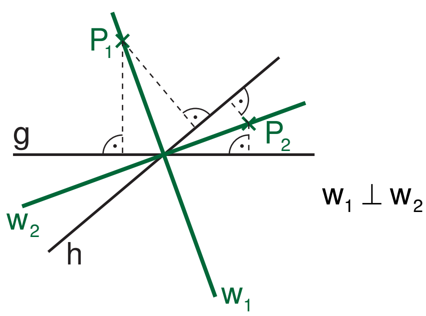
$d(P_n;g) = a$



Winkelhalbierende w_1 und w_2:

Alle Punkte P_n haben den gleichen Abstand von zwei sich schneidenden Geraden g und h.

$d(P_n;g) = d(P_n;h)$

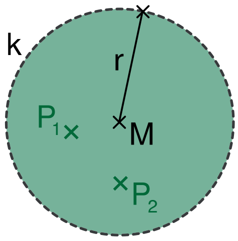


2 Ortsbereiche

Kreisinneres:

Die Entfernung der Punkte P_n vom Mittelpunkt M ist geringer als der Radius.

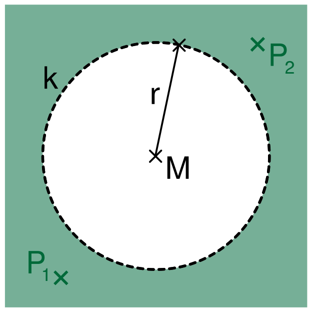
$|\overline{MP_n}| < r$



Kreisäußeres:

Die Entfernung der Punkte P_n vom Mittelpunkt M ist größer als der Radius.

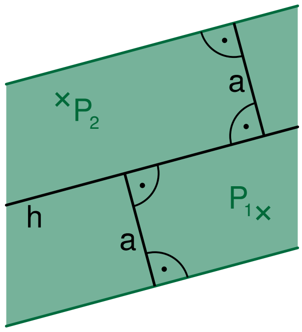
$|\overline{MP_n}| > r$



Streifen:

Alle Punkte P_n sind höchstens a LE von h entfernt.

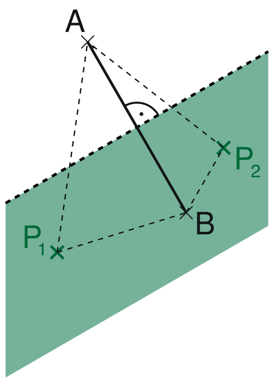
$d(P_n;h) \leq a$



Halbebene:

Die Entfernung der Punkte P_n von A ist größer als die Entfernung der Punkte P_n von B.

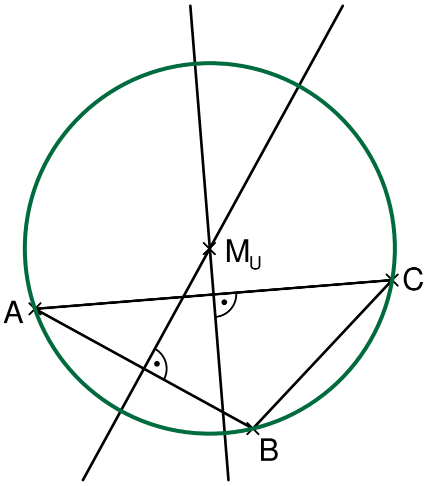
$|\overline{AP_n}| > |\overline{BP_n}|$



3 Geometrische Orte beim Dreieck

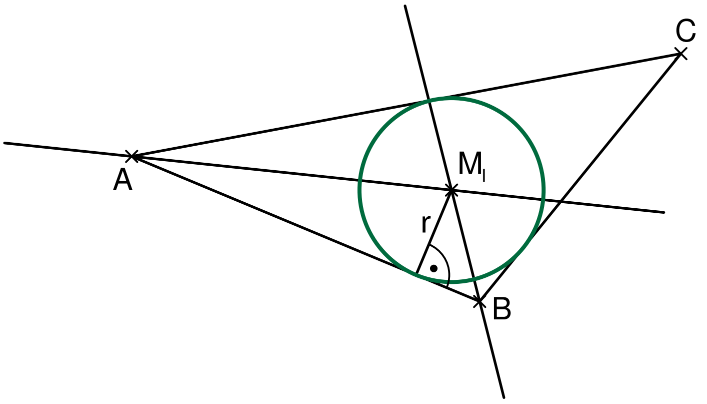
Umkreis des Dreiecks:

Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt M_U des Umkreises.



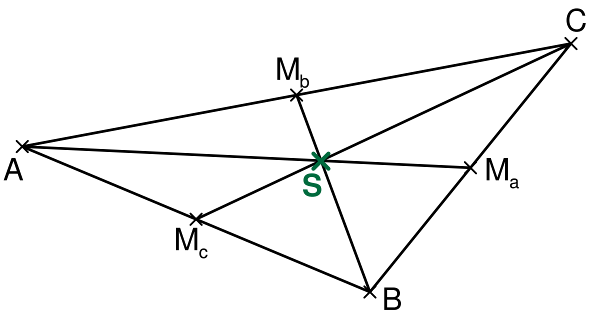
Inkreis des Dreiecks:

Die Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt M_I des Inkreises.



Schwerpunkt des Dreiecks:

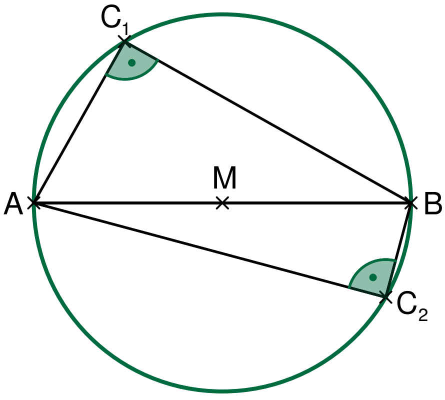
Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt S des Dreiecks.



Thaleskreis:

Jeder Punkt C_n auf einem Kreis um den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ legt mit den Punkten A und B einen rechten Winkel fest.

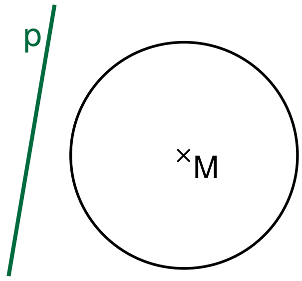
Es gilt: $\sphericalangle AC_1B = 90°$; $\sphericalangle BC_2A = 90°$.



4 Gerade und Kreis

Passante:

Die Gerade p und der Kreis haben **keinen** gemeinsamen Punkt.

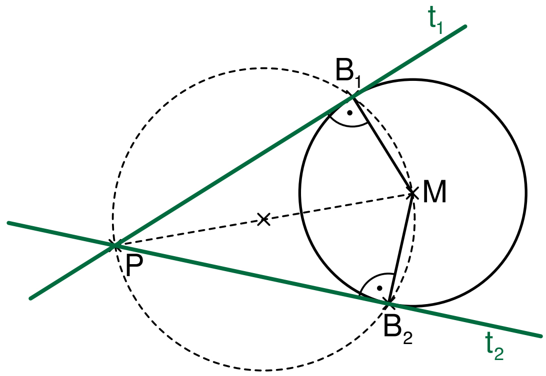


Tangenten:

Die Tangenten t_1 und t_2 haben mit der Kreislinie jeweils **genau einen** Berührpunkt gemeinsam.

Jede Tangente an einen Kreis steht im Berührpunkt senkrecht auf dem „Berührradius“.

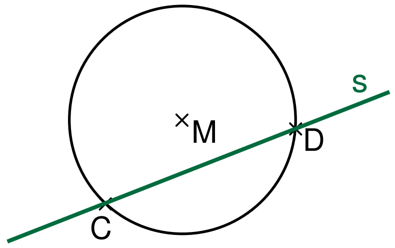
Die Konstruktion erfolgt mithilfe des Thaleskreises.



Sekante:

Die Gerade s hat mit der Kreislinie **zwei** Punkte gemeinsam.

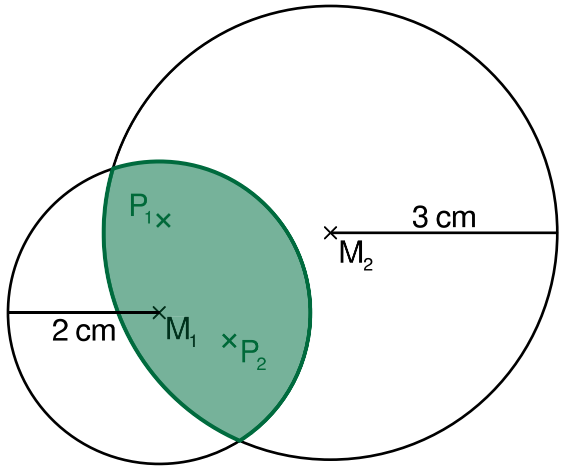
Die Strecke $\overline{CD}$ heißt **Sehne**.



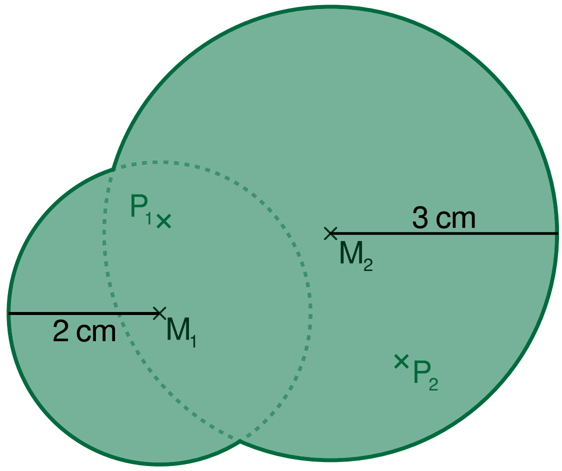
5 Verknüpfen von geometrischen Orten

Beispiele:

1) Die Punkte P_n haben vom Punkt M_1 eine Entfernung von höchstens 2 cm **und zugleich** vom Punkt M_2 eine Entfernung von höchstens 3 cm.



2) Die Punkte P_n haben vom Punkt M_1 eine Entfernung von höchstens 2 cm **oder auch** vom Punkt M_2 eine Entfernung von höchstens 3 cm.



Terme, Gleichungen und Ungleichungen

1 Vereinfachen von Termen

Die Zahl, mit der eine Variable multipliziert wird, heißt Koeffizient.

Terme, die sich nur in den Koeffizienten (Zahlfaktoren) vor den Variablen unterscheiden, nennt man **gleichartige** Terme. Gleichartige Terme kann man durch Addieren der Koeffizienten zusammenfassen.

Es ist erlaubt, die Multiplikationszeichen zwischen dem Koeffizienten und der Variablen wegzulassen.

Beispiele:

- $5x + 3x = (5+3)x = 8x$
- $5x^2 + 3x + 2x^2 = 7x^2 + 3x$
- $0{,}5a^3 - 6a - 7{,}3a^3 + 1{,}2a^2 - 3a = 0{,}5a^3 - 7{,}3a^3 + 1{,}2a^2 - 6a - 3a = -6{,}8a^3 + 1{,}2a^2 - 9a$

Bei der Multiplikation von Termen können die Potenzgesetze angewendet werden.

Beispiele:

- $5x \cdot x^3 \cdot x^2 = 5x^6$
- $(4x)^2 = 16x^2$

2 Gleichungen

Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $ax + b = c$ ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder durch sie dividiert.

Beispiele $(G = \mathbb{Q})$:

1)

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{3}x - 5 = -7 && \left|\, +5 \right. \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{3}x = -2 && \left|\, : \tfrac{1}{3} \right. \quad \text{besser } \left|\, \cdot 3 \right. \\ \Leftrightarrow\ & x = -6 \end{aligned}$$

$L = \{-6\}$

2)

$$\begin{aligned} & 5x + 6 - 7x = -9 + 3 \cdot 4 \\ \Leftrightarrow\ & -2x + 6 = 3 && \left|\, -6 \right. \\ \Leftrightarrow\ & -2x = -3 && \left|\, :(-2) \right. \\ \Leftrightarrow\ & x = 1{,}5 \end{aligned}$$

$L = \{1{,}5\}$

3 Ungleichungen

Die Lösungsmenge einer Ungleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert,
- beide Seiten mit der gleichen positiven Zahl multipliziert oder durch sie dividiert,
- beide Seiten mit der gleichen negativen Zahl multipliziert oder durch sie dividiert und das Ungleichheitszeichen umkehrt (**Inversionsgesetz**).

Beispiele $(G = \mathbb{Q})$:

1) $6x \geq -27 \quad \mid :6$

$\Leftrightarrow \quad x \geq -4{,}5$

$L = \{x \mid x \geq -4{,}5\} = [-4{,}5; \infty[$

lies: „Die Mengen aller x, für die gilt: x ist größer oder gleich $-4{,}5$."

2) $-2x < 14 \quad \mid :(-2)$

$\Leftrightarrow \quad x > -7$ **Inversionsgesetz!**

$L = \{x \mid x > -7\} =]-7; \infty[$

3) $-\frac{1}{4}x + 5 \geq -3 \quad \mid -5$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}x \geq -8 \quad \left| :\left(-\frac{1}{4}\right) \right.$ bzw. $\mid \cdot(-4)$

$\Leftrightarrow \quad x \leq 32$ **Inversionsgesetz!**

$L = \{x \mid x \leq 32\} =]-\infty; 32]$

Die Lösungsmenge ist jeweils in Mengen- und Intervallschreibweise angegeben.

Proportionalitäten

1 Prozentrechnung

Vermehrter Grundwert: Der vermehrte Grundwert entspricht dem Prozentwert, der sich aus einer Vermehrung des Grundwerts ergibt.

Beispiel: Das neue Gehalt beträgt nach einer 5 %-igen Erhöhung 2710,05 €.
Wie hoch war das ursprüngliche Gehalt?

Vermehrter Grundwert: 2710,05 € ≙ 105 %

$$\begin{array}{ccc} & 2710{,}05\ € \triangleq 105\,\% & \\ :21 & & :21 \\ & 129{,}05\ € \triangleq 5\,\% & \\ \cdot 20 & & \cdot 20 \\ & 2581{,}00\ € \triangleq 100\,\% & \end{array}$$

Grundwert: 2581,00 € ≙ 100 %

Verminderter Grundwert: Der verminderte Grundwert entspricht dem Prozentwert, der sich aus einer Verminderung des Grundwerts ergibt.

Beispiel: Auf einen Kaufpreis gibt es im Werksverkauf einen Nachlass von 20 %. Der Artikel kostet nun noch 75 €.
Wie hoch war der ursprüngliche Preis?

Verminderter Grundwert: 75,00 € ≙ 80 %

$$\begin{array}{ccc} & 75{,}00\ € \triangleq 80\,\% & \\ :4 & & :4 \\ & 18{,}75\ € \triangleq 20\,\% & \\ \cdot 5 & & \cdot 5 \\ & 93{,}75\ € \triangleq 100\,\% & \end{array}$$

Grundwert: 93,75 € ≙ 100 %

2 Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung. Unter Zinsen versteht man den Geldbetrag, den man nach einer bestimmten Zeit für geliehenes Geld bezahlen muss oder für verliehenes Geld bekommt.

Es entsprechen sich:

Prozentwert (PW)	Prozentsatz (p)	Grundwert (GW)
↓	↓	↓
Zinsen (Z)	**Zinssatz (p)**	**Kapital (K)**

Quotientengleichheit: $\frac{p}{100} = \frac{Z}{K}$

Alle Berechnungen können wie beim Prozentrechnen z. B. über eine Verhältnisgleichung oder den Dreisatz durchgeführt werden. Die so berechneten Zinsen Z beziehen sich auf ein Jahr (Jahreszins).

2.1 Berechnung der Zinsen

Beispiel: Auf einem Sparbuch, für das eine Verzinsung von 3,75 % gilt, sind 940,00 €. Wie hoch sind die Zinsen?

Lösung mit einer Verhältnisgleichung	Lösung mit Dreisatz
$\frac{3{,}75}{100} = \frac{Z}{940\text{ €}}$ $Z = \frac{3{,}75 \cdot 940\text{ €}}{100} = 35{,}25\text{ €}$	$\begin{array}{rcl} & 940{,}00\text{ €} \mathrel{\widehat{=}} 100\,\% & \\ :100 & & :100 \\ & 9{,}40\text{ €} \mathrel{\widehat{=}} 1\% & \\ \cdot 3{,}75 & & \cdot 3{,}75 \\ & 35{,}25\text{ €} \mathrel{\widehat{=}} 3{,}75\,\% & \end{array}$

Die Zinsen betragen 35,25 €.

2.2 Berechnung des Zinssatzes

Beispiel: Bei einer Bank mussten für Überziehung des Kontos um 650 € Zinsen in Höhe von 26 € gezahlt werden.
Wie hoch war der Zinssatz?

Lösung mit einer Verhältnisgleichung	Lösung mit Dreisatz
$\frac{p}{100} = \frac{26}{650}$ $p = \frac{26 \cdot 100}{650} = 4$	$\begin{array}{rrcll} & 650\text{ €} & \hat{=} & 100\% & \\ :50 & & & & :50 \\ & 13\text{ €} & \hat{=} & 2\% & \\ \cdot 2 & & & & \cdot 2 \\ & 26\text{ €} & \hat{=} & 4\% & \end{array}$

Für den Zinssatz gilt: p = 4.

2.3 Berechnung des Kapitals

Beispiel: 117 €, das sind 5 % des gesamten Kapitals, gab es bei der Ausschüttung eines Aktienfonds.
Wie viel Kapital enthält der Fond?

Lösung mit einer Verhältnisgleichung	Lösung mit Dreisatz
$\frac{K}{117\text{ €}} = \frac{100}{5}$ $K = \frac{100 \cdot 117\text{ €}}{5} = 2340\text{ €}$	$\begin{array}{rrcll} & 117{,}00\text{ €} & \hat{=} & 5\% & \\ :5 & & & & :5 \\ & 23{,}40\text{ €} & \hat{=} & 1\% & \\ \cdot 100 & & & & \cdot 100 \\ & 2340{,}00\text{ €} & \hat{=} & 100\% & \end{array}$

Der Aktienfond hat ein Kapital von 2340 €.

3 Indirekte Proportionalität

> Entspricht bei einer Zuordnung von Größen das n-fache der einen Größe dem n-ten Teil der anderen Größe, so heißt diese Zuordnung indirekte Proportionalität.
>
> Sprechweise: „Die beiden Größen sind indirekt proportional zueinander."

Beispiel: Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 24 cm². Wenn $x \in \mathbb{Q}^+$ und $y \in \mathbb{Q}^+$ gilt, ist dies für unendlich viele Rechtecke verschiedener Längen x cm und Breiten y cm möglich.

$\cdot 12$ $\cdot 2$ $\cdot 3$

Länge x cm	1	2	3	4,5	6	8	10	24
Breite y cm	24	12	8	$5\frac{1}{3}$	4	3	2,4	1

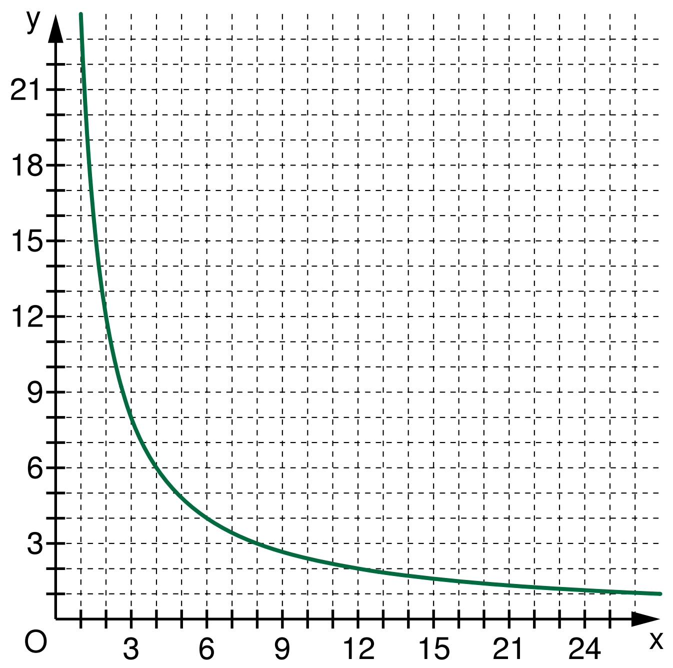
$:2$ $:3$ $:12$

Alle Zahlenpaare $(x|y)$ einer indirekten Proportionalität sind produktgleich.

Beispiel: $x \cdot y = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 5\frac{1}{3} = 6 \cdot 4 = 8 \cdot 3 = 10 \cdot 2{,}4 = 24 \cdot 1$

Die graphische Darstellung einer indirekten Proportionalität ist ein **Hyperbelast** ($x \in \mathbb{Q}^+$ und $y \in \mathbb{Q}^+$).

Beispiel:



Beispiel: Zwei Teermaschinen benötigen 3,5 Stunden für das Aufbringen einer neuen Teerschicht auf einem Autobahnabschnitt von 1,5 km Länge.
Wie lange würden drei Teermaschinen dafür brauchen?

<table>
<tr><th>Lösung mithilfe der Produktgleichheit</th><th>Lösung mit Dreisatz</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>Maschinen</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Zeit in h</td><td>3,5</td><td>y</td></tr>
</table>

$$2 \cdot 3{,}5 = 3 \cdot y$$

$$y = \frac{2 \cdot 3{,}5}{3} = 2\frac{1}{3}$$
</td><td>

$$\begin{array}{lrcll} & 2\text{ Maschinen} & \hat{=} & 3{,}5\text{ h} & \\ :2 & & & & \cdot 2 \\ & 1\text{ Maschinen} & \hat{=} & 7\text{ h} & \\ \cdot 3 & & & & :3 \\ & 3\text{ Maschinen} & \hat{=} & 2\frac{1}{3}\text{ h} & \end{array}$$
</td></tr>
</table>

Drei Teermaschinen würden 2 Stunden und 20 Minuten benötigen.

Auswertung von Daten

1 Statistische Kenngrößen

Statistische Kenngrößen sind wichtige Werte für die Analyse von Daten:

- **Modalwert**: Wert, der am häufigsten auftritt
- **arithmetisches Mittel**: der Durchschnitt, d. h. $\dfrac{\text{Summe aller Datenwerte}}{\text{Anzahl der Datenwerte}}$
- **Zentralwert**: Wert, der in der Mitte der geordneten Datenreihe liegt.
- **Spannweite**: Differenz aus dem größten (**Maximum**) und kleinsten (**Minimum**) Wert einer Datenreihe

Beispiel: In der Tabelle sind die Körpergrößen von Schülerinnen und Schüler einer Klasse zusammengestellt.

Name	Körpergröße	Name	Körpergröße
Murat	162 cm	Jennifer	163 cm
Nadine	151 cm	Claudia	167 cm
Florian	153 cm	Tobias	165 cm
Anna	165 cm	Michael	160 cm
Thomas	149 cm	Delia	149 cm
Silke	163 cm	Markus	153 cm
Christoph	170 cm	Sergej	165 cm
Sibylle	164 cm		

Spannweite: $170\,\text{cm} - 149\,\text{cm} = 21\,\text{cm}$

Modalwert:
Die Häufigkeitstabelle für die Körpergrößen gibt an, wie oft eine bestimmte Körpergröße vorkommt.

Körpergröße in cm	149	151	153	160	162	163	164	**165**	167	170
Häufigkeit	2	1	2	1	1	2	1	**3**	1	1

Modalwert: 165 cm

Arithmetisches Mittel:

$$\frac{(2\cdot 149+151+2\cdot 153+160+162+2\cdot 163+164+3\cdot 165+167+170)}{2+1+2+1+1+2+1+3+1+1}\,\text{cm}$$

$$=\frac{2399}{15}\,\text{cm}$$

$$\approx 159{,}93\,\text{cm}$$

Der Durchschnitt der Körpergrößen beträgt ca. 160 cm.

Zentralwert:
Sortiert man die Daten für die Körpergrößen der Größe nach, so ist der Wert, der in der Mitte dieser sortierten Liste steht, der Zentralwert.

Körpergröße in cm:
149 149 151 153 153 160 162 **162** 162 163 163 164 165 167 170

Zentralwert: 162 cm

Der Zentralwert für die Körpergrößen in cm der Jungen ergibt sich aus der geordneten Liste.

Körpergröße in cm:
149 153 153 **160 162** 165 165 170

Den Zentralwert erhält man hier als arithmetisches Mittel aus 160 cm und 162 cm:

$$\frac{160+162}{2}\,\text{cm}=161\,\text{cm}$$

2 Repräsentative Stichprobe:

Ist es zu aufwändig, alle Personen einer bestimmten Gruppe zu befragen oder alle Objekte zu zählen, beschränkt man sich auf eine Stichprobe. Stellt diese Stichprobe ein verkleinertes Bild der Gesamtheit dar, das dieser möglichst ähnlich ist, so nennt man sie **repräsentativ**.

Beispiel: Der beliebteste Fußballverein in Deutschland soll durch eine Umfrage ermittelt werden. Eine solche Umfrage ist nicht repräsentativ, wenn die befragten Personen alle aus Nürnberg kommen.