

Terme

Termumformungen

1. Vereinfachung von Produkten

Halte dich an folgende Reihenfolge:

- Klammern bei Potenzen auflösen
- Vorzeichen des Produkts bestimmen
- Ordnen: Zahlen zuerst, dann Variablen in alphabetischer Reihenfolge
- Produktwert der Zahlen berechnen, bei den Variablen das 1. Potenzgesetz anwenden

Beispiel: $2b^2 \cdot (-2a)^3 \cdot (-a)b^4 = 2b^2 \cdot (-8)a^3 \cdot (-a)b^4 = + 2 \cdot 8a^3ab^2b^4 = 16a^4b^6$

Ü: a) $(-2a^2)^2 \cdot (-\frac{1}{2}b) \cdot (-\frac{1}{4})a^2b$; b) $3a \cdot 4b \cdot 5c(-a)^2 \cdot (-b)^3 \cdot (-c)^4$;

2. Vereinfachung von Summen

Gleichartige Summanden addiert man, indem man ihre **Koeffizienten addiert** und die Variable unverändert lässt.

(**Gleichartige Summanden** sind Summanden mit der gleichen Variablen in der gleichen Potenz.)

Beispiel: $2a + 3b + 4a - 5b = (2 + 4)a + (3 - 5)b = 6a - 2b$;
 $x - x^2 - 2x^2 - 3x = (1 - 3)x + (-1 - 2)x^2 = - 2x - 3x^2$

Ü: a) $- 2ab - 3ac - 4ab - 5ac$; b) $c^2d - \frac{1}{2}cd^2 + \frac{1}{3}c^2d - cd^2$

Auflösen von Klammern

$\dots + (- a + b - c) = - a + b - c$;	$\dots - (- a + b - c) = + a - b + c$
---	---------------------------------------

Beispiel: $3 + (4 - a) = 3 + 4 - a = 7 - a$; $x^3 - (- x^2 - 3x + 4) = x^3 + x^2 + 3x - 4$

Ü: c) $(-3 + a) - 5$; d) $2 - (x - 5 + y) + (3 - z) - 1$

3. Umwandlung von Produkten in Summen

Ausmultiplizieren:

Nach dem Distributivgesetz gilt: $a \cdot (b + c) = ab + ac$; bzw $a \cdot (b - c) = ab - ac$

Beispiel: $2(x - 3 + 2y) = 2x - 6 + 4y$; $ab(ab - b) = a^2b^2 - ab^2$

Ü: a) $x^2(- 3x - 4x^2 - 5)$; b) $2(x + 3) - x(3 - y)$;

Multiplikation von Summen:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Beispiel: $(2 - x)(3 + x) = 6 + 2x - 3x - x^2 = 6 - x - x^2$

Ü: c) $(ab - a)(b - ab)$; d) $(a - 3)(4 + 2a) - (2 + a)(a^2 - 6)$

Binomische Formeln:

$$\begin{array}{l} 1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ 2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ 3. (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \end{array}$$

Beispiel: $(2 + x)^2 = 4 + 4x + x^2$; $(3c - 4d)^2 = 9c^2 - 24cd + 16d^2$; $(2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 9$;

Ü: e) $(2 - 3b)^2$; f) $(x^2 + \frac{1}{2}y)^2$; g) $(a - 4b)(a + 4b)$

4. Umwandlung von Summen in Produkte (Faktorisieren)**Ausklammern:**

Nach dem Distributivgesetz gilt: $ab + ac = a(b + c)$ bzw. $ab - ac = a(b - c)$

Beispiel: $2x - 4y + 6 = 2(x - 2y + 3)$; $24x^2y^3 - 16x^3y^2 + 8xy^2 = 8xy^2(3xy - 2x^2 + 1)$

Beachte: Beim Ausklammern wird jeder Summand durch den Term **dividiert**, der ausgeklammert wurde.

Beispiel: $-\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}(x^2 + 6x - \frac{1}{2})$

Ü: a) Klammere vollständig aus! $6ab - 24a^2b + 12b^2$

b) Klammere den Faktor 2 aus! $\frac{1}{2}x^2 - x - 2$

Binomische Formeln:

Bei geeigneten Termen lässt sich die Umwandlung in ein Produkt mit Hilfe der **binomischen Formeln** durchführen.

Beispiel: $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$; $4x^2 - 8xy + 4y^2 = (2x - 2y)^2$

Ü: c) Faktorisiere so weit wie möglich! $3a^2 - 75$; d) $3x^2 - 6xy + 3y^2$

5. Quadratische Ergänzung

Quadratische Terme der Form $x^2 \pm px + q$ lassen sich durch die **quadratische Ergänzung** $x^2 \pm px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$ und die anschließende Anwendung der **1. bzw. 2. binomischen**

Formel auf die ersten drei Summanden in einen Term der Form $\left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$ verwandeln.

Beispiel: $x^2 + 6x - 3 = x^2 + 6x + \mathbf{9} - \mathbf{9} - 3 = (x + 3)^2 - 12$;
 $-2x^2 + 10x + 8 = -2(x^2 - 5x - 4) = -2(x^2 - 5x + \mathbf{6,25} - \mathbf{6,25} - 4) = -2[(x - 2,5)^2 - 10,25]$
 $= -2(x - 2,5)^2 + 20,5$

Ü: a) $x^2 + x + 1$; b) $-\frac{1}{2}x^2 - 2x$

Extremwerte quadratischer Terme

Hat der quadratische Term die Form $a(x - b)^2 + c$, ($a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$), so besitzt er :

wenn $a > 0$ ist, das Minimum c für $x = b$
wenn $a < 0$ ist, das Maximum c für $x = b$.

Beispiel: $T_1 = -x^2 + 2$; $T_{\max} = 2$ für $x = 0$; $T_2 = -(x + 3)^2 - 8$; $T_{\max} = -8$ für $x = -3$
 $T_3 = 2x^2 - 4$; $T_{\min} = -4$ für $x = 0$

Ü: a) $-\frac{1}{2}(a - 1)^2$; b) $3(x + 2)^2 - 2$; c) $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$;

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

1. Zum Lösen einer Gleichung oder Ungleichung verwendet man Äquivalenzumformungen. Jede Umformung muss immer auf beiden Seiten der Gl. oder Ungl. vorgenommen werden.

Bsp.: $3x - 7 - 2x = 5x + 9 - 4$ Zusammenfassen gleichartiger Terme
 $\Leftrightarrow x - 7 = 5x + 5 \quad | -5x + 7$ Sammeln und Zusammenfassen gleichartiger
 $\Leftrightarrow x - 5x = 5 + 7$ Terme auf verschiedenen Seiten
 $\Leftrightarrow -4x = 12 \quad | :(-4)$ Division durch den Koeffizienten der Variablen
 $\Leftrightarrow x = -3$
 $\Rightarrow L = \{-3\}$

Die Lösungsmenge einer Ungleichung enthält die umgeformte Ungleichung selbst.

Bsp.: $3x < 12 \Leftrightarrow x < 4 \Rightarrow L = \{x \mid x < 4\}$

Das Ungleichzeichen bleibt bei allen Äquivalenzumformungen unverändert, außer man dividiert oder multipliziert mit einer negativen Zahl. (**Inversionsgesetz**)

Bsp.: $-2x > 8 \Leftrightarrow x < -4$

Ü: 1. Löse die folgenden Gleichungen und Ungleichungen.

a) $2a - 3 = 5 + 6a - 8$ b) $3b + 12 < 4 - 7b$ c) $-2c - 9 > c + 4$

2. Um eine Textaufgabe lösen zu können, sollte man einige wichtige Schritte beachten:

- im Text mit verschiedenen Farben das markieren, was gesucht ist
- eine Variable für die gesuchte Größe festlegen
- die Aussage des Textes in einen oder mehrere Terme übersetzen
- aus den Termen eine Gleichung oder Ungleichung bilden
- die Lösung der Gleichung oder Ungleichung bestimmen
- das Ergebnis durch Einsetzen in die Terme überprüfen
- das Ergebnis in einem Antwortsatz wiedergeben

3. Ist eine Gleichung in der Form

$$(ax + b) \cdot (cx + d) = 0$$

gegeben, so spaltet sich die Gleichung zur Lösung in zwei Fälle auf:

(I.) $ax + b = 0$ \vee (II.) $cx + d = 0$ (\vee bedeutet „oder auch“),

da ein Produkt genau dann null ist, wenn einer der Faktoren null ist. Beide Gleichungen werden für sich gelöst und die Teillösungsmengen L_1 und L_2 angegeben. Die Gesamtlösungsmenge L ist dann die Vereinigungsmenge der beiden Teillösungsmengen:

$$L = L_1 \cup L_2 = \left\{ x \mid x = -\frac{b}{a} \vee x = -\frac{d}{c} \right\}$$

Ü: 2. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $(2x - 5) \cdot (3x + 4) = 0$.

4. Ist eine Doppelungleichung gegeben, löst man sie in zwei Ungleichungen auf und bildet die Schnittmenge der beiden Teillösungsmengen L_1 und L_2 zur Lösungsmenge L , da sie beiden Bedingungen zugleich gehorchen muss.

Bsp.: $3x + 1 < 5x - 2 < 9x + 4$
 $\Leftrightarrow 3x + 1 < 5x - 2 \quad \wedge \quad 5x - 2 < 9x + 4$ (\wedge bedeutet „und zugleich“)
 $\Leftrightarrow -2x < -3 \quad \wedge \quad -4x < 6$
 $\Leftrightarrow x > 1,5 \quad \wedge \quad x > -1,5$
 $\Rightarrow L_1 = \{ x \mid x > 1,5 \} \quad \wedge \quad L_2 = \{ x \mid x > -1,5 \}$
 $\Rightarrow L = L_1 \cap L_2 = \{ x \mid x > 1,5 \wedge x > -1,5 \} = \{ x \mid x > 1,5 \}$

Ü: 3. Bestimme die Lösungsmenge der Doppelungleichung $5y + 6 < y - 2 < 2y + 9$

Bruchterme und Bruchgleichungen

Bruchterme: Terme, bei denen der Nenner mindestens eine Variable enthält.

Definitionsmenge: Alle Zahlen der Grundmenge, für die der Nennerterm **nicht** Null ist, bilden die Definitionsmenge D des Bruchterms

Beispiel: $\frac{4}{x} \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $\frac{x}{x^2 - 1} \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$

Rechnen mit Bruchtermen:

Es gelten grundsätzlich die Rechenregeln für rationale Zahlen. (GW 6. Kl.) Beachte aber:

- bei Termumformungen sind ursprünglicher und umgeformter Term nur in der Definitionsmenge äquivalent, in der **beide** Terme definiert sind.

- beim **Kürzen** müssen Zähler und Nenner zunächst **faktoriert** werden. Gleiches gilt für den Nenner, wenn man Bruchterme **gleichnamig machen** will.

Beispiele: Kürze! $\frac{4x - 4}{x^2 - 1} = \frac{4(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{4}{x + 1} \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$

Addiere! $\frac{1}{4x + 12} + \frac{4x}{x^2 - 9} =$

$= \frac{1(x - 3) + 16x}{4(x + 3)(x - 3)} = \frac{17x - 3}{4(x + 3)(x - 3)}$

Nenner faktorisieren: $4x + 12 = 4(x + 3)$
 $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$
 Hauptnenner: $4(x + 3)(x - 3)$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{3; -3\}$

Bruchgleichungen

Bruchgleichungen sind Gleichungen mit mindestens einem Bruchterm.

Lösungsbeispiel: $\frac{4}{x - 1} = \frac{6}{x}$

$\frac{4}{x - 1} = \frac{6}{x} \quad / \cdot (x - 1)x$

$4x = 6(x - 1)$

$4x = 6x - 6 \quad / - 6x$

$-2x = -6 \quad / : (-2)$

$x = 3$

$L = \{3\}$

- Definitionsmenge bestimmen: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 1\}$

- Hauptnenner suchen: $(x - 1)x$

- Bruchgleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren

- Kürzen

- Gleichung nach x auflösen

- Lösungsmenge angeben

In Bruchgleichungen der Form $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_3}{T_4}$ können die Nenner auch durch " **Überkreuz Multiplizieren** "

beseitigt werden: $T_1 \cdot T_4 = T_2 \cdot T_3$

Ü: 1. Vereinfache! Gib jeweils die Definitionsmenge an!

a) $\frac{4}{2x - 6} - \frac{12}{x^2 - 9}$; b) $\frac{x + 4}{x - 4} : \frac{2x + 8}{3x - 12}$

2. Bestimme die Definitionsmenge und gib die Lösungsmenge an! $G = \mathbb{Q}$

$\frac{3x - 4}{3x - 6} = \frac{2x + 5}{2x - 4}$

RELATIONEN UND FUNKTIONEN

Die **Produktmenge** $M_1 \times M_2$ ist die Menge aller geordneten Zahlenpaare $(x | y)$ mit $x \in M_1$ und $y \in M_2$. (Sprechweise: „ M_1 kreuz M_2 “)

Darstellung der Produktmenge

Aufzählende Form $M_1 \times M_2 = \{-2; 1; 3\} \times \{0; 2\}$
 $= \{(-2 | 0); (-2 | 2); (1 | 0); (1 | 2); (3 | 0); (3 | 2)\}$

Beschreibende Form $M_1 \times M_2 = \{(x | y) | x \in M_1 \wedge y \in M_2\}$

Relationen als Lösungsmenge von Aussageformen

Die **Relationsvorschrift** sondert aus der Produktmenge $M_1 \times M_2$ eine Menge von geordneten Zahlenpaaren $(x | y)$ aus. Durch die Aussageform wird eine Beziehung (**Relation**) zwischen Elementen von M_1 und M_2 hergestellt.

Beispiel: $y = x - 1$ $M_1 \times M_2 = \{-2; 1; 3\} \times \{0; 2\} \Rightarrow R = \{(1 | 0); (3 | 2)\}$

Relation

Die Lösungsmenge einer Aussageform mit zwei Variablen $x \in M_1$ und $y \in M_2$ ist eine Teilmenge von $M_1 \times M_2$. Diese Lösungsmenge bezeichnet man als die zur Aussageform gehörige **Relation R in $M_1 \times M_2$** .

$$R \subseteq M_1 \times M_2$$

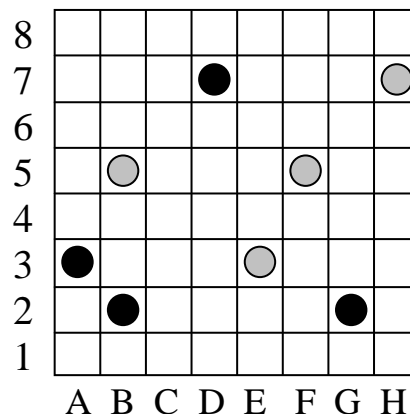
Beispiel:

Jedem Feld eines Schachbretts kann ein geordnetes Zahlenpaar $(x | y)$ zugeordnet werden mit $x \in M_1$ und $y \in M_2$, wobei

$M_1 = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ und
 $M_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Relation R: „Ein schwarzer Stein steht in der Spalte x und der Zeile y .“

$R = \{(A | 3); (B | 2); (D | 7); (G | 2)\}$



Definitions- und Wertemenge einer Relation



Die **Definitionsmenge D** ist die Menge aller ersten Komponenten einer Relation

Die **Wertemenge w** ist die Menge aller zweiten Komponenten einer Relation

Übungen:

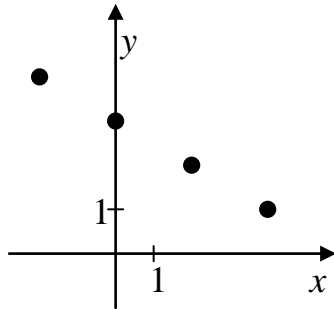
1. Bilde die Produktmenge aus $\{\square; \blacklozenge; \star\}$ und $\{\circ; \star\}$
2. Gegeben sind die Mengen $M_1 = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ und $M_2 = \{2; 4; 6; 8; 10\}$
 - a) Bilde die Produktmenge $M_1 \times M_2$ in aufzählender Form.
 - b) Gib jeweils die Relation R bezüglich $M_1 \times M_2$ für folgende Relationsvorschriften an:

$\alpha) y = x + 3$
 $\beta) y = 2x + 2$
 $\gamma) y = 2x - 3$
 - c) Gib für die Relationen unter 2b) jeweils Definitions- und Wertemenge an.

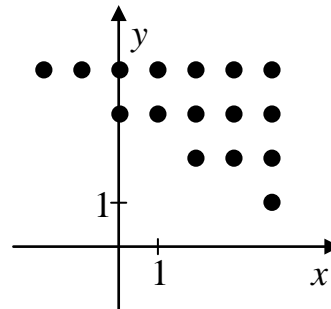
Graph der Relation

Jedem geordneten Zahlenpaar $(x | y)$, das Lösung einer Relationsvorschrift ist, kann eindeutig ein Punkt im Koordinatensystem zugeordnet werden. Die Menge der so festgelegten Punkte heißt **Graph der Relation R**.

Beispiel: $R = \{(x | y) | x + 2y = 6\}$
 $G = M \times M$
 $M = \{-2; -1; \dots; 4\}$



$R = \{(x | y) | x + 2y \geq 6\}$
 $G = M \times M$
 $M = \{-2; -1; \dots; 4\}$



Funktion
 Ordnet eine Relation R jedem Element der Definitionsmenge D **genau ein** Element der Wertemenge W zu, so nennt man R eine **Funktion** in $D \times W$.

Eine Funktion wird durch den **Funktionsterm** $f(x)$ beschrieben, $y = f(x)$ ist die **Funktionsgleichung**.

Jeder x -Wert, für den der Funktionswert $f(x) = 0$ gilt, heißt **Nullstelle der Funktion f**. Der Graph zu $f(x)$ schneidet bei der Nullstelle die x -Achse.

Beispiel: Nullstelle von $y = 3x - 5$ für $y = f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

Übungen:

3. Zeichne den Graphen der Relation für

a) $y < x + 3$ $G = \{-2; -1; \dots; 4\} \times \{-2; -1; \dots; 4\}$

b) $y \geq 2x + 1$ $G = \{-2; -1; \dots; 4\} \times \{-2; -1; \dots; 4\}$

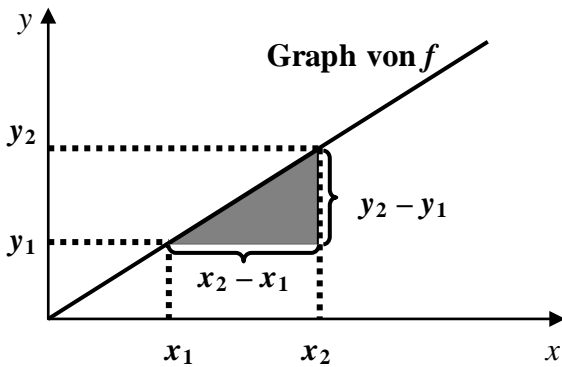
4. Berechne die Nullstellen von

a) $f(x) = 2x - 5$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$

Geradengleichung

Eine Geradengleichung in Normalform setzt sich aus der Steigung m der Geraden und dem y -Achsenabschnitt t , dem Schnittpunkt der Geraden mit der y -Achse, zusammen:

$$g : y = m \cdot x + t$$



Die **Steigung** m der Geraden ergibt sich aus dem **Steigungsdreieck** als Quotient aus der Koordinatendifferenz zweier Funktionswerte $P_1(x_1 | y_1)$ und $P_2(x_2 | y_2)$, also

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{mit } x_1 \neq x_2.$$

Beispiel: Gerade durch die Punkte A $(-2 | 5)$ und B $(3 | 0)$

$$m = \frac{0 - 5}{3 - (-2)} = \frac{-5}{5} = -1$$

Senkrechte Geraden

Sind zwei Geraden g_1 und g_2 mit den Steigungen m_1 und m_2 zueinander senkrecht (orthogonal), so gilt folgende Beziehung:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{oder} \quad m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow g_1 \perp g_2$$

Parallele Geraden

Geraden mit derselben Steigung, sind zueinander parallel. Zueinander parallele Geraden haben die gleiche Steigung, aber verschiedene y -Achsenabschnitte.

$$g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Beispiel: Die Geraden $g_1 : y = 2x + 3$ und $g_2 : y = -0,5x - 4$ stehen senkrecht zueinander, da

$$2 = -\frac{1}{-0,5} \quad \text{oder} \quad 2 \cdot (-0,5) = -1$$

Punktsteigungsform der Geradengleichung

Sind von einer Geraden nur die Steigung m und ein Punkt $P(x_p | y_p)$ bekannt, so ergibt sich die Geradengleichung wie folgt:

$$g : y = m \cdot (x - x_p) + y_p$$

Beispiel:

Die Gerade g mit der Steigung $m = \frac{2}{3}$ verläuft

durch den Punkt $P(3 | 1)$:

$$g : y = \frac{2}{3} \cdot (x - 3) + 1 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \cdot 3 + 1 = \frac{2}{3}x - 1$$

Allgemeine Geradengleichung

Ist die Geradengleichung in der allgemeinen Form

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

gegeben, so berechnet sich die Normalform zu:

$$y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b} \quad \text{mit } b \neq 0.$$

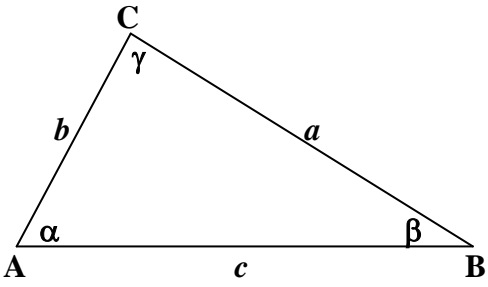
Sonderfälle:

$$b = 0: \quad x = -\frac{c}{a} \quad \text{Parallele zur } y\text{-Achse}$$

$$a = 0: \quad y = -\frac{c}{b} \quad \text{Parallele zur } x\text{-Achse}$$

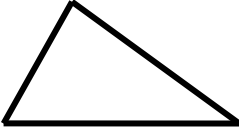
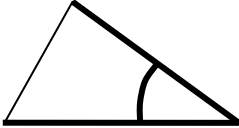
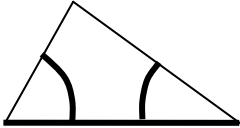
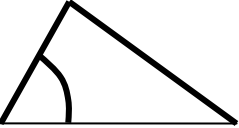
Übungen:

1. Berechne jeweils die Gleichung der Geraden durch die Punkte
 - a) A $(2 | 3)$; B $(6 | 5)$
 - b) C $(-1 | 0)$; D $(5 | -3)$
 - c) E $(-3 | -2)$; F $(0 | -6)$
2. Gib jeweils die Geradengleichung an:
 - a) $m = 3$; A $(2 | -4)$
 - b) $m = -2$; B $(-3 | 1)$
 - c) $m = 0,5$; C $(0 | 3)$
3. Gib eine zu $g_1 : y = 3x - 2$ bzw. $g_2 : y = -\frac{2}{3}x + 4$ senkrechte Gerade an.
4. Wandle in die Normalform um:
 - a) $3x - 2y + 3 = 0$
 - b) $2 = -x + 4y$

	<p><u>Bezeichnungen im Dreieck</u> Die Bezeichnung der Eckpunkte (A, B, C), der Seiten (a, b, c) und der Winkel (α, β, γ) ist stets gegen den Uhrzeigersinn.</p> <p><u>Beziehungen im Dreieck</u> In jedem Dreieck liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.</p> <p><u>Dreiecksungleichung</u> Die Summe aus zwei Seitenlängen ist stets größer als die dritte Seitenlänge. $a + b > c$ und $a + c > b$ und $b + c > a$</p>
---	--

Kongruenz: Dreiecke sind *kongruent* (deckungsgleich) zueinander, wenn sie durch eine der Kongruenzabbildungen (Parallelverschiebung, Achsenspiegelung und Drehung) aufeinander abgebildet werden können.

Da man zur eindeutigen Konstruktion eines Dreiecks mindestens drei Bestimmungsstücke benötigt, sind Dreiecke daher auch kongruent, wenn sie in

allen Seitenlängen übereinstimmen.	zwei Seitenlängen und dem Maß ihres Zwischenwinkels übereinstimmen.	einer Seitenlänge und den Maßen der daran anliegenden Winkel übereinstimmen.	zwei Seitenlängen und dem Maß des Winkels, der der größeren Seite gegenüberliegt, übereinstimmen.
			
SSS-Satz	SWS-Satz	WSW-Satz	SsW-Satz

Übung: Konstruiere das Dreieck ABC mit folgenden Angaben:

- | | |
|--|--|
| a) $a = 7 \text{ cm}; b = 4 \text{ cm}; c = 5 \text{ cm}$ | b) $a = 5 \text{ cm}; c = 7 \text{ cm}; \beta = 40^\circ$ |
| c) $c = 6 \text{ cm}; \alpha = 50^\circ; \beta = 60^\circ$ | d) $a = 7 \text{ cm}; b = 4 \text{ cm}; \alpha = 40^\circ$ |

Der geometrische Beweis

Mithilfe der Kongruenzabbildungen und der Sätze über kongruente Dreiecke lassen sich Behauptungen bzw. Vermutungen geometrisch begründen. Der durchzuführende Beweis muss, um allgemeine Gültigkeit zu haben, ein bestimmtes Schema einhalten, er muss logisch und in sich richtig (konsistent) sein.

- **Behauptung:** Vermutung, die aus der Messung an konkreten Beispielen abgeleitet wird
- **Voraussetzungen:** Zusammenstellung aller für den Beweis nötigen Aussagen, die sich als allgemein bekannt vorausgesetzt aus den geometrischen Ortslinien und Ortsbereichen und ihren Beziehungen zueinander ableiten lassen
- **Beweis:** analoge Schlussfolgerungen aus den Voraussetzungen auf die Behauptung

Begründung mithilfe von Vektoren

Strecken sind zueinander parallel, wenn die entsprechenden Vektoren durch die Endpunkte der Strecken Repräsentanten desselben Vektors sind.

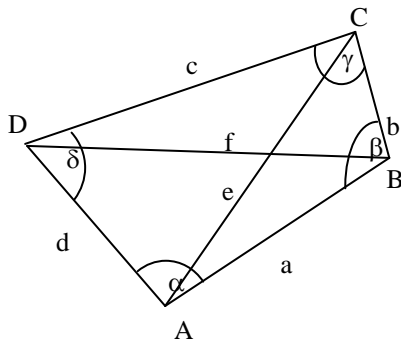
Strecken sind gleich lang, wenn die entsprechenden Vektoren betragsgleiche Koeffizienten aufweisen.

Beispiel: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$

Vierecke

Bezeichnungen:

konvexes Viereck



Vierecke mit Umkreis - Sehnenvierecke:

Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der vier Seiten.

Die Summe zweier gegenüberliegender Winkel beträgt 180 °. ($\alpha + \gamma = \beta + \delta$)

Vierecke mit Inkreis - Tangentenvierecke:

Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der vier Innenwinkel.

Die Summen zweier gegenüberliegender Seiten sind gleich groß. ($a + c = b + d$)

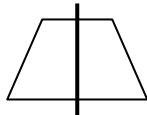
Sonderformen:

Trapez



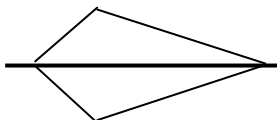
2 parallele Grundseiten

Gleichschenkliges Trapez



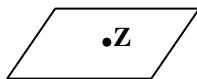
2 gleich lange Schenkel - die an den Schenkeln anliegenden Winkel ergeben zusammen 180 ° - die Diagonalen sind gleich lang - lotsymmetrisch
Umkreis

Drachen



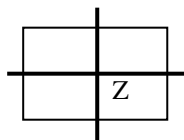
Je 2 von der Symmetrieachse ausgehende Seiten sind gleich lang - die der Symmetrieachse gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß - die Symmetrieachse steht auf der 2. Diagonalen senkrecht und halbiert diese - diagonalsymmetrisch
Inkreis

Parallelogramm



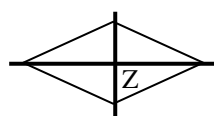
Je 2 gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel - Je 2 gegenüberliegende Winkel sind gleich groß - die Diagonalen halbieren sich gegenseitig - punktsymmetrisch

Rechteck



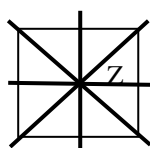
Sonderform von gleichschenkligen Trapez und Parallelogramm
4 rechte Winkel - lot- und punktsymmetrisch - 2 Symmetrieachsen

Raute



Sonderform von Drachen und Parallelogramm
4 gleich lange Seiten - diagonal- und punktsymmetrisch
2 Symmetrieachsen

Quadrat



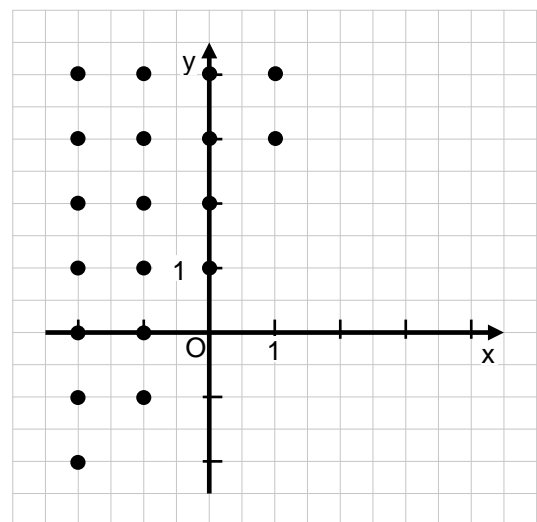
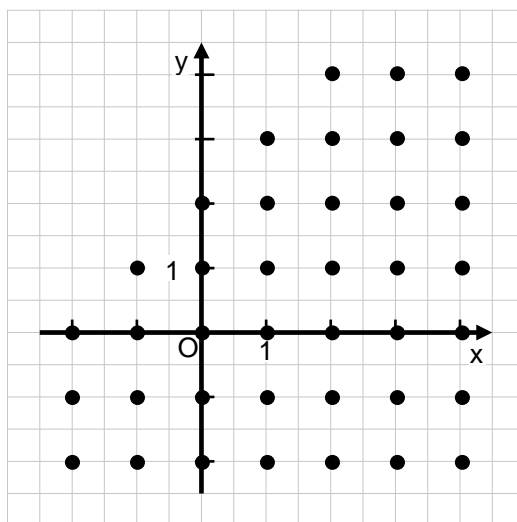
Sonderform von Rechteck und Raute
4 Symmetrieachsen

- 8I/1 1. a) $\frac{1}{2}a^6b^2$ b) $-60a^3b^4c^5$
2. a) $-6ab - 8ac$ b) $1\frac{1}{3}c^2d - 1\frac{1}{2}cd^2$ c) $-8 + a$ d) $9 - x - y - z$
3. a) $-3x^3 - 4x^4 - 5x^2$ b) $-x + 6 + xy$ c) $ab^2 - a^2b^2 - ab + a^2b$
- d) $-a^3 + 4a$ e) $4 - 12b + 9b^2$ f) $x^4 + x^2y + \frac{1}{4}y^2$ g) $a^2 - 16b^2$
4. a) $6b(a - 4a^2 + 2b)$ b) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ c) $3(a - 5)(a + 5)$ d) $3(x - y)^2$
5. a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 0,75$ b) $-\frac{1}{2}(x + 2) + 2$
- Extremwerte : a) $T_{\max} = 0$ für $a = 1$ b) $T_{\min} = -2$ für $x = -2$
- c) $T_{\max} = 5$ für $x = -2$

- 8I/2 1. a) $L = \{0\}$ b) $L = \{b \mid b < -0,8\}$ c) $L = \{c \mid c < -4\frac{1}{3}\}$
2. $L = \left\{-\frac{4}{3}; 2,5\right\}$
3. $L = \{y \mid -11 < y < -2\}$

- 8I/3 1. a) $\frac{2}{x+3}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$ b) $\frac{3}{2}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-4; 4\}$
2. $L = \{ \}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$

- 8I/4 1. $\{(\square; \circ); (\blacklozenge; \circ); (\star; \circ); (\square; \star); (\blacklozenge; \star); (\star; \star)\}$
2. a) $\{(-1|2); (-1|4); (-1|6); (-1|8); (-1|10); (0|2); (0|4); (0|6); (0|8); (0|10); (1|2); (1|4); (1|6); (1|8); (1|10); (2|2); (2|4); (2|6); (2|8); (2|10); (3|2); (3|4); (3|6); (3|8); (3|10)\}$
- b) $\alpha) \{(-1|2); (1|4); (3|6)\}$ $\beta) \{(0|2); (1|4); (2|6); (3|8)\}$ $\gamma) \{ \}$
- c) $\alpha) D = \{-1; 1; 3\}$; $W = \{2; 4; 6\}$ $\beta) D = \{0; 1; 2; 3\}$; $W = \{2; 4; 6; 8\}$
- $\gamma) D = \{ \}$; $W = \{ \}$
3. a) b)



4. a) $x = 2,5$ b) $x = -6$

Lösungen

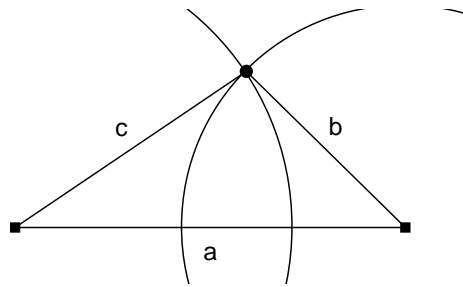
Grundwissen 8I

- 8I/5 1. a) $y = \frac{1}{2}x + 2$ b) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ c) $y = -\frac{4}{3}x - 6$
2. a) $y = 3x - 10$ b) $y = -2x - 5$ c) $y = 0,5x + 3$
3. Beispiele: $h_1 : y = -\frac{1}{3}x + t$ und $h_2 : y = \frac{3}{2}x + t$

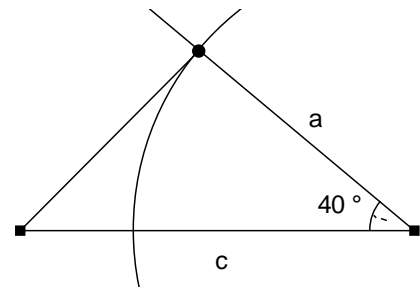
Die y-Achsenabschnitte sind beliebig, lediglich die Steigung entscheidet über die Orthogonalität der beiden Geraden.

4. a) $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ b) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

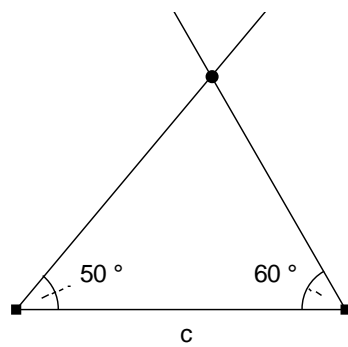
8I/7 a)



b)



c)



d)

